В. В. Прасолов

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи повышенной сложности

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2019

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
П70

6+

Прасолов В. В.

П70 Геометрия. Задачи повышенной сложности. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. В. Прасолов. — М. : Просвещение, 2019. — 80 с. : ил. — ISBN 978-5-09-064083-1.

Книга содержит задачи повышенной сложности по геометрии для учащихся 7 класса. Каждая глава начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этому разделу. Затем разбираются решения нескольких наиболее типичных задач повышенной сложности. Далее приводятся задачи для самостоятельного решения. Решать задачи учащимся рекомендуется именно в предлагаемой последовательности, так как такой порядок нацелен на постепенное формирование умения решать задачи. В конце пособия приведены ответы и ко всем задачам даны указания.

Книга может быть полезной как для учителей, так и для учащихся, которые хотят повысить свой уровень или подготовиться к математической олимпиаде, уровень которой ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

Учебное издание

Прасолов Виктор Васильевич

Геометрия. Задачи повышенной сложности

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики. Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*. Редактор *П. А. Бессарабова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художественный редактор *Т. В. Глушкова*. Дизайн *О. Г. Чичвариной*. Фотография из фотобанка «Shutterstock». Компьютерная вёрстка и техническое редактирование *О. С. Ивановой*. Компьютерная графика *И. В. Губиной*. Корректор *И. А. Григалашвили*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.02.19. Формат $70\times90\,{}^1/_{16}$. Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSP. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,22. Тираж 1500 экз. Заказ № 6073ТТ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.

ISBN 978-5-09-064083-1

Предисловие

Учебное пособие «Геометрия. Задачи повышенной сложности» предназначено для учащихся 7 классов, обучающихся по УМК А. Д. Александрова и др., Л. С. Атанасяна и др., В. Ф. Бутузова и др. или А. В. Погорелова.

Каждый раздел начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этому разделу. Они могут понадобиться при решении задач.

После перечисления основных фактов и понятий разбираются решения нескольких наиболее типичных задач повышенной сложности. Затем приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце пособия к ним приведены ответы и указания. Сначала нужно сверить ответ и, лишь убедившись, что ответ получен верный, можно обратиться к указаниям. При этом следует иметь в виду, что некоторые задачи допускают решения разными способами, и если в указаниях предлагается другой способ рассуждений, то это ещё не значит, что ваше решение неверное. Но с этим другим решением тоже нужно разобраться.

В пособиях темы по классам распределены следующим образом.

7 класс

1. Прямая и отрезок, луч и угол. 2. Сравнение и измерение отрезков и углов. 3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы. 4. Равнобедренный треугольник. 5. Признаки равенства треугольников. 6. Прямоугольные треугольники. 7. Сумма углов треугольника. 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. 9. Окружность и круг. 10. Задачи на построение. 11. Параллельные прямые.

8 класс

12. Параллелограмм и трапеция. 13. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника. 14. Вписанный угол. 15. Неравенства между сторонами и углами треугольника. 16. Теорема Пифагора. 17. Подобные треугольники. 18. Площадь. 19. Движения. 20. Подобие.

9 класс

21. Теоремы синусов и косинусов. 22. Соотношения в треугольнике. 23. Касательные и секущие. 24. Вписанная и описанная окружности. 25. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. 26. Методы решения задач на построение. 27. Координаты. 28. Векторы. 29. Правильные многоугольники. 30. Длина окружности и площадь круга.

При решении задач можно выбирать темы либо в том порядке, в каком они расположены в пособии, либо в том порядке, в каком они расположены в учебнике. В пособии задачи расположены систематически, и эта система вполне согласуется со всеми перечисленными УМК. Решать задачи желательно именно в предлагаемой последовательности. Порядок предлагаемых для решения задач нацелен на постепенное формирование умения решать задачи. Изученные теоремы применяются для решения задач сначала в более простых частных случаях, а уже после этого в общем виде. Например, теорема о сумме углов применяется сначала для прямоугольных треугольников, а уже после этого для произвольных треугольников; теорема о вписанном угле применяется сначала для угла, опирающегося на диаметр, а уже после этого для произвольного угла.

Пособие можно использовать для подготовки к математической олимпиаде школьников, уровень которой ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

1. Прямая и отрезок, луч и угол

Основные факты и понятия

Через две точки проходит прямая, и притом только одна. Две прямые не могут иметь больше одной общей точки.

Для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, одна из этих точек лежит между двумя другими.

Отрезок — это фигура, состоящая из всех точек прямой, лежащих между двумя данными точками (концами отрезка).

Прямая разделяет плоскость на две части. Если концы отрезка лежат в одной из этих частей, то отрезок не пересекает прямую, а если концы отрезка лежат в разных частях, то отрезок пересекает прямую.

Точка O, лежащая на прямой a, разделяет прямую a на две части, каждую из которых называют *лучом*, исходящим из точки O. Точку O называют *началом* каждого из этих лучей.

Угол — это фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Общее начало двух лучей называют *вершиной* угла, а сами лучи — *сторонами* угла.

Угол называют *развёрнутым*, если его стороны лежат на одной прямой.

Внутренняя область неразвёрнутого угла AOB — это общая часть полуплоскости с границей AO, содержащей точку B, и полуплоскости с границей BO, содержащей точку A. Про точки внутренней области угла говорят, что они лежат *внутри* угла.

Примеры решения задач

Пример 1. Сколько точек пересечения могут иметь три прямые, каждые две из которых пересекаются?

Решение. По условию две данные прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке O. Третья прямая l_3 либо проходит через точку O (рис. 1, *а*), либо не проходит через эту точку. Во втором случае прямая l_3 пересекает прямые l_1 и l_2 в разных точках (рис. 1, *б*), поскольку единственная общая точка прямых l_1 и l_2 — это точка O.

В первом случае прямые имеют одну общую точку, а во втором случае прямые имеют три общие точки.

Ответ: одну или три.

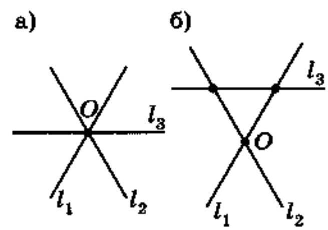

Рис. 1

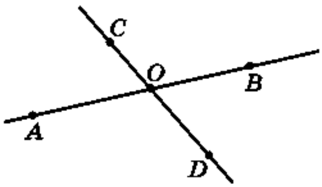

Рис. 2

Пример 2. Точки A, B, C и D не лежат на одной прямой, прямая AB пересекает отрезок CD, прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 2). Прямая AB пересекает отрезок CD, поэтому точка O лежит между точками C и D, т. е. она лежит на отрезке CD. Прямая CD пересекает отрезок AB, поэтому точка O лежит между точками A и B, т. е. она лежит на отрезке AB.

Пример 3. На сколько частей могут делить плоскость три прямые, каждые две из которых пересекаются?

Решение. Как было показано при разборе примера 1, возможны два случая: три прямые пересекаются либо в одной точке, либо в трёх точках. В первом случае они разделяют плоскость на 6 частей, а во втором — на 7 частей.

Ответ: на 6 или на 7.

Задачи

Количество точек пересечения прямых

1.1. Сколько точек пересечения могут иметь четыре прямые, каждые две из которых пересекаются?

1.2. Сколько точек пересечения могут иметь пять прямых, каждые две из которых пересекаются?

Количество прямых или отрезков

1.3. На плоскости отметили три точки и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.4. На плоскости отметили четыре точки и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.5. На плоскости отметили пять точек и через каждые две из них провели прямую. Сколько при этом могло получиться прямых?

1.6. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться шесть прямых?

1.7. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться n прямых?

1.8. На прямой отметили четыре точки. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

1.9. На прямой отметили n точек. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

Точки, лежащие на одной прямой, и прямые, проходящие через одну точку

1.10. а) Точки A, B, C и D попарно различны, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки B, C и D лежат на одной прямой. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой.

б) Некоторые из точек A, B, C и D могут совпадать, точки A, B и C лежат на одной прямой, точки B, C и D лежат на одной прямой. Обязательно ли точки A, B, C и D лежат на одной прямой?

1.11. а) Прямые a, b, c и d попарно различны, прямые a, b и c пересекаются в одной точке, прямые b, c и d пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые a, b, c и d пересекаются в одной точке.

б) Некоторые из прямых a, b, c и d могут совпадать, прямые a, b и c имеют общую точку, прямые b, c и d имеют общую точку. Обязательно ли прямые a, b, c и d имеют общую точку?

Точки по разные стороны от прямой

1.12. Отрезки AB, BC, CD и DE пересекают данную прямую, а их концы не лежат на ней. Пересекает ли эту прямую отрезок AD? А отрезок AE?

1.13. Отрезок AB пересекает прямую l, а отрезок AC её не пересекает. На отрезке AC отмечена точка D. Пересекает ли отрезок BD прямую l?

1.14. Отрезки AB и CD пересекаются в точке, отличной от концов этих отрезков. Докажите, что отрезок BD и прямая AC не пересекаются.

1.15. На плоскости отметили 9 точек и попарно соединили их отрезками. Может ли прямая, не проходящая ни через одну из отмеченных точек, пересекать ровно 20 отрезков?

1.16. На плоскости отметили 10 точек и попарно соединили их отрезками. Может ли прямая, не проходящая ни через одну из отмеченных точек, пересекать ровно 20 отрезков?

1.17. На плоскости отметили несколько точек и попарно соединили их отрезками. Прямая, не проходящая ни через одну из отмеченных точек, пересекает 21 отрезок. Чему может быть равно число отмеченных точек?

Количество частей

1.18. На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые, каждые две из которых пересекаются?

1.19. На сколько частей могут делить плоскость 5 прямых, каждые две из которых пересекаются?

2. Сравнение и измерение отрезков и углов

Основные факты и понятия

За единицу измерения можно принять любой отрезок. *Длина* отрезка выражается положительным числом, показывающим, сколько раз укладываются в нём единица измерения и её части.

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Если точка разбивает отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков.

Если луч разбивает угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих двух углов.

Развёрнутый угол равен 180°.

Угол называют *прямым*, если он равен 90°. Угол, меньший прямого, называют *острым*, а угол, который больше прямого, но меньше развёрнутого, называют *тупым*.

Середина отрезка — это точка, делящая его на два равных отрезка.

Биссектриса угла — это луч, делящий его на два равных угла.

На любом луче от его начала можно отложить отрезок данной длины, и притом только один.

Примеры решения задач

Пример 1. В деревне A живут 50 школьников, а в деревне B живут 100 школьников. Расстояние между деревнями равно 3 км. В какой точке дороги из A в B нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

Решение. Пусть расстояние от школы до деревни B равно x км. Тогда суммарное расстояние в километрах, проходимое всеми школьниками из деревни B, равно $100x$, а расстояние, проходимое школьниками из деревни A, равно $50(3 - x)$. Поэтому расстояние, проходимое всеми школьниками, равно $100x + 50(3 - x) = 150 + 50x$. Оно будет наименьшим, когда $x = 0$, т. е. школа находится в деревне B.

Ответ: в деревне B.

Пример 2. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 3 ч 10 мин?

Решение. В 3 ч часовая и минутная стрелки образуют угол 90°. Часовая стрелка за 1 ч проходит угол 30°, поэтому за 1 мин она проходит 0,5°. Минутная стрелка за 1 ч проходит 360°, поэтому за 1 мин она проходит 6°. Следовательно, за 10 мин минутная стрелка пройдёт 60°, сокращая угол, а часовая стрелка пройдёт 5°, увеличивая угол (рис. 3). В итоге получится угол $90° - 60° + 5° = 35°$.

Ответ: 35°.

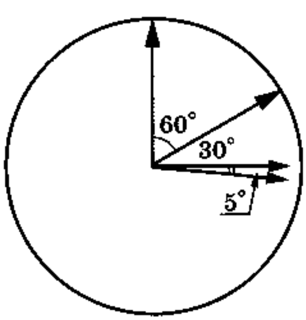

Рис. 3

Пример 3. На линейке есть деления 0, 4 и 11 см. Постройте отрезок длиной 1 см.

Решение. Имеющиеся деления позволяют строить отрезки длиной 4 см и 11 см. Трижды отложив отрезок длиной 4 см, получим отрезок длиной 12 см. Отложив на отрезке длиной 12 см отрезок длиной 11 см, получим отрезок длиной 1 см (рис. 4).

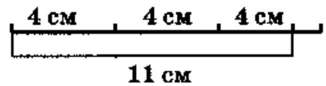

Рис. 4

Задачи

Середина отрезка

2.1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, $AB = 6$ и $AC = 2$. Чему может быть равно расстояние от точки A до середины отрезка BC?

2.2. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

2.3. На прямой отмечены три точки. Могут ли середины двух отрезков с концами в этих точках совпадать?

2.4. На прямой отмечены четыре точки. Могут ли середины двух отрезков с концами в этих точках совпадать?

2.5. На прямой отмечены пять точек. Могут ли середины трёх отрезков с концами в этих точках совпадать?

Сумма расстояний

2.6. На прямолинейной дороге стоят три дома. В каком месте дороги нужно выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от домов до колодца была наименьшей?

2.7. На прямолинейной дороге из избы A в избу B расположены избы C и D. В какой точке дороги нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырёх изб была наименьшей?

2.8. На прямой отмечены точки A_1, ..., A_{10}, причём точки A_2, ..., A_9 лежат на отрезке A_1A_{10}, длина которого равна 1 см. Докажите, что сумма попарных расстояний между отмеченными точками больше 8 см.

2.9. На прямой AB отмечены 25 точек, лежащих вне отрезка AB. Может ли сумма расстояний от этих точек до точки A быть равной сумме расстояний от них до точки B?

Построение отрезка данной длины линейкой с тремя делениями

2.10. На линейке есть деления 0, 3 и 8 см. Постройте отрезок длиной 7 см.

2.11. На линейке есть деления 0, 7 и 11 см. Постройте отрезок длиной: а) 8 см; б) 1 см.

2.12. На линейке есть деления 0, 13 и 17 см. Постройте отрезок длиной: а) 3 см; б) 1 см; в) 9 см.

Биссектриса угла

2.13. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC так, что $\angle AOB = 140°$, $\angle BOC = 60°$ и $\angle AOC = 80°$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC.

2.14. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC так, что $\angle AOB = 140°$, $\angle BOC = 60°$ и $\angle AOC = 160°$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC.

2.15. Докажите, что если угол между биссектрисами углов AOB и BOC прямой, то точки A, O и C лежат на одной прямой.

2.16. Неразвёрнутые углы AOC и BOC равны α и β. Найдите угол между их биссектрисами.

2.17. Из точки O выходят лучи OA, OB, OC и OD, следующие друг за другом по часовой стрелке. Сумма углов AOB и COD равна 180°. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOD.

Угол между стрелками часов

2.18. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки: а) в 9 ч 30 мин; б) в 10 ч 40 мин?

2.19. Какой угол (острый или тупой) образуют стрелки часов: а) в 3 ч 1 мин; б) в 2 ч 59 мин?

2.20. В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелками равен α. Через час он снова равен α. Найдите все возможные значения α.

2.21. В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелками равен α. Через полчаса он снова равен α. Найдите все возможные значения α.

2.22. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют угол 90°?

Построение данного угла с помощью угольника

Построения данного угла с помощью угольника, угол которого известен, во многом похожи на построения данного отрезка с помощью линейки с двумя делениями. Такая линейка позволяет откладывать отрезки двух данных длин, а при построении угольником можно пользоваться углом угольника и углом 180°.

2.23. Имеется угольник с углом 40°. Как с его помощью построить угол, равный 20°?

2.24. Имеется угольник с углом 70°. Как с его помощью построить угол, равный 40°?

2.25. Имеется угольник с углом 19°. Как с его помощью построить угол, равный 1°?

2.26. Отметьте на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 10 и 12.

2.27. Отметьте на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 9 и 12.

2.28. Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.

2.29. Можно ли отметить на прямой четыре точки так, чтобы попарные расстояния между ними были следующие: 2, 3, 5, 7, 8 и 12?

3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы

Основные факты и понятия

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называют *смежными*. Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называют *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла. Вертикальные углы равны.

Две прямые называют *перпендикулярными*, если они образуют четыре прямых угла.

Пусть точка A не лежит на прямой a, точка H лежит на прямой a и прямые a и AH перпендикулярны. Тогда отрезок AH называют *перпендикуляром*, проведённым к прямой a из точки A.

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Задачи

3.1. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.

3.2. Три прямые пересекаются в одной точке, отмеченные на рисунке 5 углы равны. Найдите величину отмеченных углов.

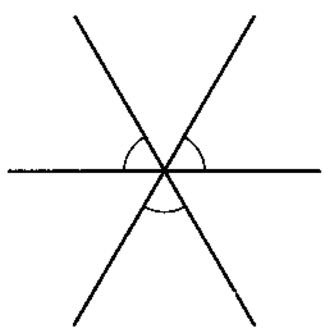

Рис. 5

3.3. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

3.4. Две прямые делят плоскость на четыре угла. Докажите, что биссектрисы этих углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

4. Равнобедренный треугольник

Основные факты и понятия

Треугольник, у которого равны две стороны, называют *равнобедренным*. Две равные стороны этого треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью сторону называют *основанием* равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого равны все три стороны, называют *равносторонним*.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы его угла от вершины до точки пересечения с противоположной стороной.

Высотой треугольника называют перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Задачи

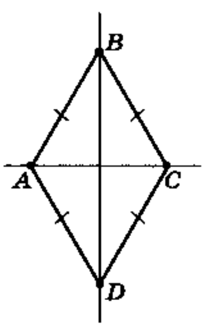

Рис. 6

4.1. Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OC$.

4.2. Докажите, что противолежащие основанию вершины всех равнобедренных треугольников с общим основанием лежат на одной прямой.

4.3. Четыре точки A, B, C и D таковы, что отрезки AB, BC, CD и DA равны (рис. 6). Докажите, что $AC \perp BD$.

4.4. Медиана AM треугольника ABC вдвое меньше его стороны BC. Докажите, что $\angle A = \angle B + \angle C$.

5. Признаки равенства треугольников

Основные факты и понятия

Первый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

При записи равенства треугольников удобно соблюдать соответствие вершин, чтобы равенство $\triangle ABC = \triangle DEF$ означало не только равенство треугольников ABC и DEF, но и равенство соответственных сторон: $AB = DE$, $BC = EF$ и $AC = DF$. Соответственные углы при этом тоже равны: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$.

Точка M лежит *внутри* треугольника ABC, если она лежит во внутренней области углов BAC, CBA и ACB, т. е. точки M и A лежат по одну сторону от прямой BC, точки M и B — по одну сторону от прямой AC, точки M и C — по одну сторону от прямой AB.

Примеры решения задач

Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Докажите, что $AC = BD$.

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по двум сторонам и углу между ними.

Пример 2. На одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и C, на другой — точки B и D, отрезки AD и BC пересекаются в точке E (рис. 7). Докажите, что если $AC = BD$ и $OA = OB$, то луч OE является биссектрисой угла AOB.

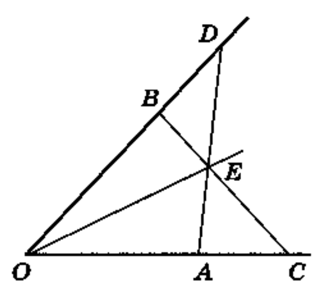

Рис. 7

Решение. Треугольники OAD и OBC равны по двум сторонам ($OA = OB$ и $OD = OB + BD = OA + AC = OC$) и углу между ними.

Треугольники EAC и EBD равны по стороне ($AC = BD$) и прилежащим к ней углам (углы C и D являются равными углами треугольников OAD

и OBC, а углы A и B являются смежными с равными углами этих треугольников).

Треугольники OEC и OED равны по трём сторонам (сторона OE у них общая, равенство сторон OC и OD следует непосредственно из условия, равенство сторон EC и ED следует из равенства треугольников EAC и EBD).

Из равенства треугольников OEC и OED следует равенство углов COE и DOE.

Задачи

Равнобедренный треугольник

Признаки равенства треугольников позволяют лучше изучить свойства уже знакомого нам равнобедренного треугольника.

5.1. Биссектриса треугольника является также и его высотой. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

5.2. Высота треугольника является также и его медианой. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

Комментарий. Если биссектриса треугольника является также и его медианой, то этот треугольник равнобедренный (см. задачу 8.21).

5.3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, $AO = OC$ и $MO = ON$. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

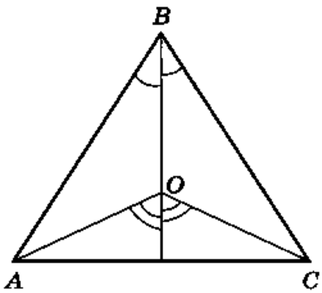

Рис. 8

5.4. Внутри треугольника ABC отмечена точка O так, что луч BO делит пополам углы ABC и AOC (рис. 8). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

5.5. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle AMD = \angle CME$, где M — середина основания AC. Докажите, что $AE = CD$.

5.6. На наибольшей стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM = AB$ и $CN = CB$. Докажите, что если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.

Равные отрезки

5.7. Биссектриса BK треугольника ABC равна стороне AB. На продолжении отрезка BK за точку K отмечена точка L так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BL = BC$.

5.8. Точки A, B и C лежат на одной прямой, вне этой прямой отмечены точки D и E так, что $AD = AE$ и $BD = BE$. Докажите, что $CD = CE$.

5.9. У звезды, изображённой на рисунке 9, равны углы с вершинами A и B, углы с вершинами C и E, а также $AC = BE$. Докажите, что $AD = BD$.

5.10. Точка O — середина медианы AM треугольника ABC, $BO = BM$. Прямая CO пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что $KA = KO$.

Вспомогательные равные треугольники

Комментарий. Для решения геометрической задачи иногда бывает нужно рассмотреть дополнительную точку или провести дополнительную прямую. В результате появляется дополнительный (вспомогательный) треугольник, равный какому-либо другому треугольнику.

5.11. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки L и K так, что L — середина отрезка AK и BK — биссектриса угла LBC. При этом $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.

5.12. Биссектриса AD треугольника ABC равна отрезку DC, $AC = 2AB$. Найдите угол B.

Комментарий. Можно найти и остальные углы треугольника: $\angle A = 60°$ и $\angle C = 30°$ (см. задачу 6.7).

Неверные признаки равенства треугольников

5.13. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника. Равны также высоты, проведённые к третьим сторонам. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.14. Две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.15. Два угла и сторона одного треугольника равны двум углам и стороне другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

5.16. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AN = CM$ (рис. 10). Могут ли отрезки AM и CN быть неравными?

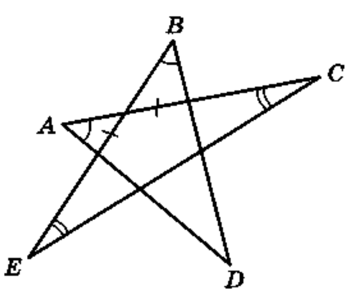

Рис. 9

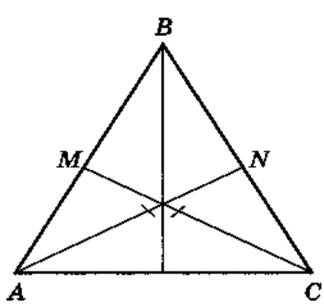

Рис. 10

6. Прямоугольные треугольники

Основные факты и понятия

Треугольник, один из углов которого прямой, называют *прямоугольным*. У треугольника не может быть двух прямых углов. Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие стороны называют *катетами*.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Гипотенуза прямоугольного треугольника больше любого из катетов.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Серединный перпендикуляр к отрезку — это прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. Каждая точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла, равноудалённая от его сторон, лежит на его биссектрисе.

Прямоугольник — это фигура, составленная из двух прямоугольных треугольников (рис. 11). Углы этой фигуры равны 90°. Противоположные стороны этой фигуры равны.

Квадрат — это фигура, составленная из двух равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 12). Углы этой фигуры равны 90°. Все стороны этой фигуры равны.

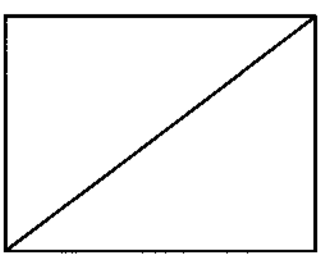

Рис. 11

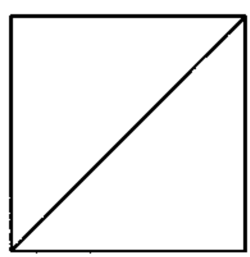

Рис. 12

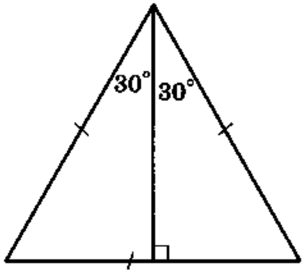

Рис. 13

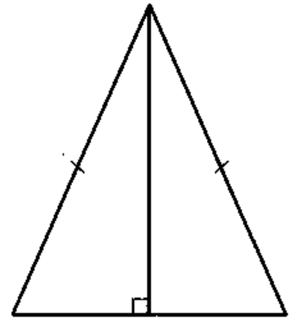

Рис. 14

Треугольник, составленный из двух прямоугольных треугольников с углом 30°, равносторонний (рис. 13). Треугольник, у которого две стороны равны, а угол между ними равен 60°, равносторонний. Углы равностороннего треугольника равны 60°.

Равнобедренный треугольник можно сложить из двух равных прямоугольных треугольников (рис. 14), поэтому сумма углов равнобедренного треугольника равна 180°.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.

Решение. Приложим друг к другу равные катеты двух прямоугольных треугольников с равными катетами и гипотенузами так, чтобы их прямые углы стали смежными (рис. 15). Из равенства гипотенуз следует, что полученный треугольник равнобедренный. Поэтому углы при основании этого треугольника равны, т. е. острые углы данных треугольников, противолежащие равным катетам, равны. Но тогда равны и острые углы, прилежащие катетам, а значит, треугольники равны.

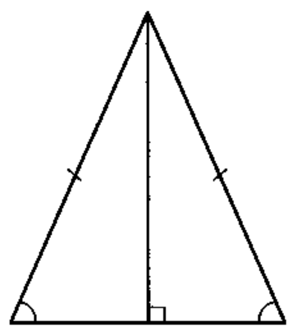

Рис. 15

Пример 2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. На катетах BC и AC соответственно отмечены точки L и M так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LKM тоже прямоугольный равнобедренный.

Решение. Медиана CK равнобедренного треугольника ACB (рис. 16) является его биссектрисой, поэтому $KB = KC$. Треугольники KLB и KMC равны по двум сторонам ($BL = CM$ и $KB = KC$) и углу между ними

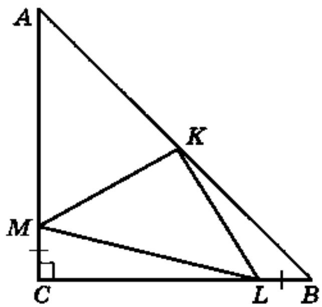

Рис. 16

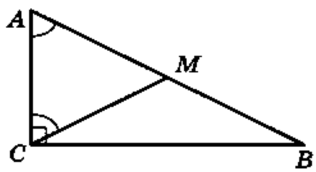

Рис. 17

$(\angle KBL = \angle KCM = 45°)$. Поэтому $LK = KM$ и $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM =$
$$= \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90°.$$

Пример 3. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Решение. Выберем на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC точку M так, что $\angle ACM = \angle A$ (рис. 17). Тогда
$$\angle BCM = 90° - \angle ACM = 90° - \angle A = \angle B,$$
поэтому $MB = MC = MA$. Таким образом, CM — медиана и
$$2CM = MA + MB = AB.$$

Задачи

Равенство прямоугольных треугольников

6.1. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведённой к другому катету.

6.2. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.

6.3. Докажите, что треугольник, в котором равны две высоты, равнобедренный.

Сумма углов прямоугольного треугольника

6.4. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Биссектриса AD угла A пересекает отрезок CH в точке K. Докажите, что $CK = KD$.

6.5. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH, а в треугольнике ACH проведена биссектриса CD. Докажите, что $CB = BD$.

6.6. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что биссектрисы углов BAC и BCH перпендикулярны.

6.7. Сторона BC треугольника ABC вдвое больше стороны AC. На стороне BC отмечена точка D, для которой $\angle CAD = \angle B$. Прямая AD пересекает биссектрису угла, смежного с углом ACB, в точке E. Докажите, что $AE = AB$.

6.8. Биссектриса AD треугольника ABC равна отрезку DC, $AC = 2AB$. Найдите углы треугольника ABC.

Прямоугольный треугольник с углом 30°

6.9. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен 75°. Докажите, что высота AH вдвое меньше боковой стороны.

6.10. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули (вдоль прямой BK) так, как показано на рисунке 18. Найдите отношение $DK : AB$, если точка C_1 — середина стороны AD.

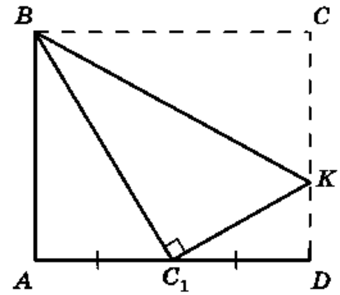

Рис. 18

6.11. Медиана и высота, выходящие из вершины одного угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Найдите углы этого треугольника.

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе

6.12. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = CM$. Докажите, что точка M — середина гипотенузы.

6.13. Докажите, что биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника с неравными катетами делит пополам угол между медианой и высотой.

6.14. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D так, что $BD = BC$, а на катете BC отмечена точка E так, что $BE = ED$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

Равносторонний треугольник

6.15. Сторона AB треугольника ABC вдвое больше стороны AC, и $\angle A = 60°$. Найдите угол C.

6.16. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки P, Q и R так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

6.17. В треугольнике ABC угол A равен 60°, $AB > AC$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны AC, BC и $AB - AC$.

6.18. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны AC, BC и $AB + AC$.

6.19. Два равносторонних треугольника имеют общую вершину (рис. 19). Докажите, что $AD = BE$.

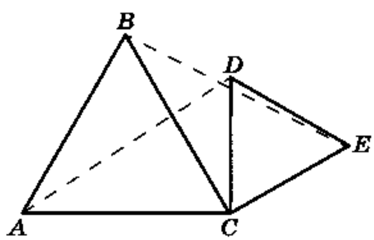

Рис. 19

6.20. Угол A треугольника ABC равен 120°. На биссектрисе этого угла отмечена точка D так, что $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник DBC равносторонний.

6.21. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны AC за точку A — в точке X. Докажите, что если $XY = YZ$ и $AY = BZ$, то $XZ \perp BC$.

Прямоугольник

6.22. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

6.23. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника является серединой каждой из них.

6.24. Точка M — середина стороны AB прямоугольника $ABCD$, а точка H — основание перпендикуляра, проведённого из точки C к прямой MD. Докажите, что $BC = BH$.

6.25. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K так, что $CK = CB$. На стороне BC отмечена точка M так, что $CM = MK$. Докажите, что $AK + BM = CM$.

6.26. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 1. Точка E — середина стороны BC, точка F — основание перпендикуляра, проведённого из точки A к прямой DE. Найдите длину отрезка BF.

Квадрат

6.27. Два квадрата имеют общую вершину (рис. 20). Докажите, что $AE = CG$.

6.28. Три квадрата расположены так, как показано на рисунке 21. Докажите, что $AB = CD$.

6.29. На стороне квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABE (вершина E расположена внутри квадрата, рис. 22). Найдите углы треугольника CDE.

630. На стороне квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABE (вершина E расположена вне квадрата, рис. 23). Найдите углы треугольника CDE.

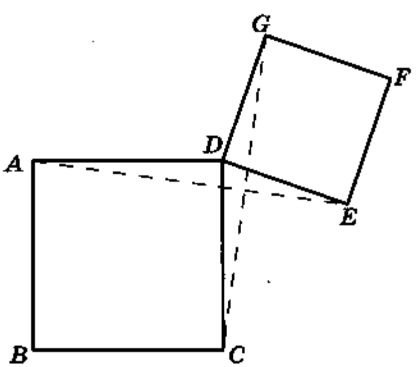

Рис. 20

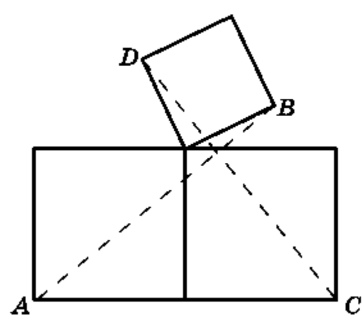

Рис.21

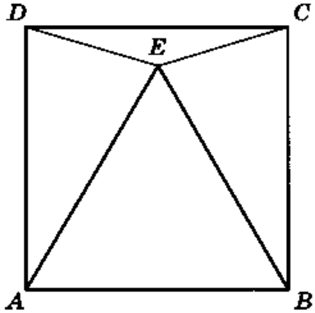

Рис. 22

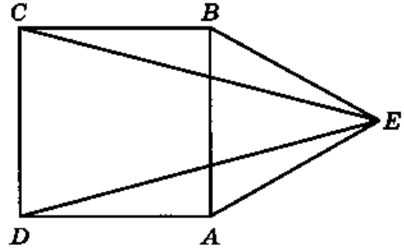

Рис. 23

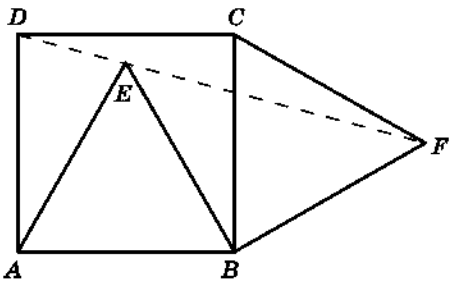

Рис. 24

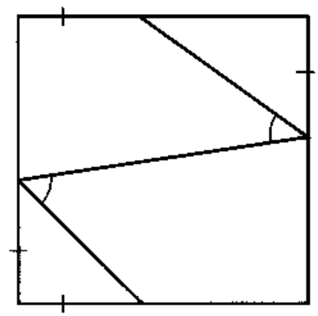

Рис. 25

6.31. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ внутренним и внешним образом построены равносторонние треугольники ABE и BCF (рис. 24). Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

6.32. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $\angle EAF = 45°$. Докажите, что $EF = BE + DF$.

6.33. На сторонах квадрата отложены 4 равных отрезка (как показано на рисунке 25). Докажите, что два отмеченных угла равны.

6.34. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ за точку C отмечена точка E так, что $BE = AC$. Найдите угол AEB.

6.35. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка P. Биссектриса угла DCP пересекает сторону AD в точке Q. Докажите, что $CP = DQ + BP$.

6.36. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что $AM = 3CM$, точка O — середина стороны AB. Найдите угол DMO.

6.37. Найдите сумму величин двух углов, нарисованных на клетчатой бумаге (рис. 26).

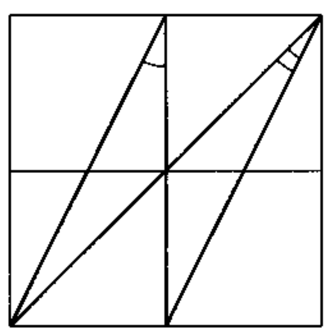

Рис. 26

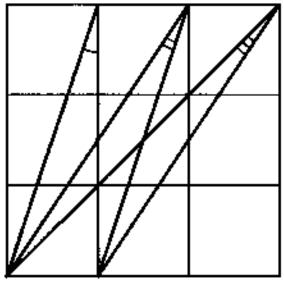

Рис. 27

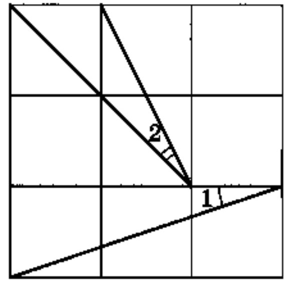

Рис. 28

6.38. Найдите сумму величин трёх углов, нарисованных на клетчатой бумаге (рис. 27).

6.39. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму углов, под которыми видна гипотенуза этого треугольника из трёх оставшихся вершин квадрата.

6.40. Катет BC прямоугольного треугольника ABC втрое больше катета AC. Он разделён точками D и E на три равные части. Найдите сумму углов AEC, ADC и ABC.

6.41. Каждая сторона квадрата разделена на три равные части и точки деления соединены отрезками, как показано на рисунке 28. Докажите, что углы 1 и 2 равны.

7. Сумма углов треугольника

Основные факты и понятия

Сумма углов треугольника равна 180°. Мы уже ранее пользовались этим фактом для прямоугольных треугольников и для равнобедренных треугольников.

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с каким-нибудь из углов этого треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.

Примеры решения задач

Пример 1. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 29). Найдите угол BOC, если известен угол A.

Решение. Угол BOC можно выразить через углы OBC и OCB:

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C.$$

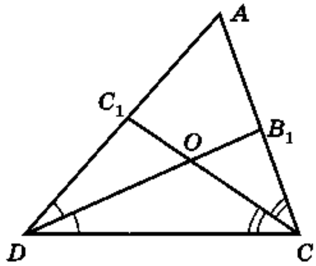

Рис. 29

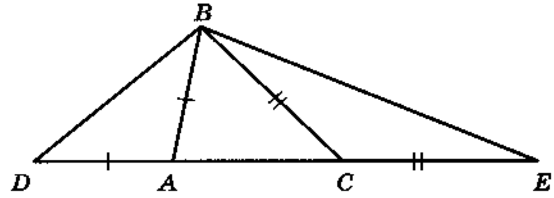

Рис. 30

Кроме того, $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$, поэтому $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Ответ: $90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Пример 2. Угол B треугольника ABC равен β. На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок AD, равный AB, а на продолжении стороны AC за точку C отложен отрезок CE, равный CB (рис. 30). Найдите угол DBE.

Решение. Пусть углы A и C равны α и γ. Угол A — это внешний угол равнобедренного треугольника BAD, поэтому $\angle DBA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle CBE = \frac{\gamma}{2}$. Следовательно, $\angle DBE = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2}$. Кроме того, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{180° - \beta}{2}$, поэтому $\angle DBE = 90° + \frac{\beta}{2}$.

Ответ: $90° + \frac{\beta}{2}$.

Пример 3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E так, что треугольник ABE равносторонний. Отрезки AC и BE пересекаются в точке F. Докажите, что $CE = CF$ (на рисунке 31 эти отрезки отмечены).

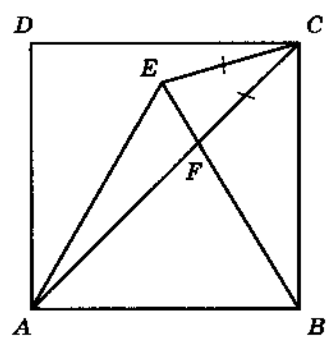

Рис. 31

Решение. Треугольник CBE равнобедренный, поскольку $BC = BA = BE$. Поэтому $\angle CEB = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. В треугольнике ABF известны два угла, поэтому можно найти третий угол: $\angle AFB = 180° - 45° - 60° = 75°$. Таким образом, $\angle EFC = \angle AFB = 75° = \angle CEF$, поэтому $CE = CF$.

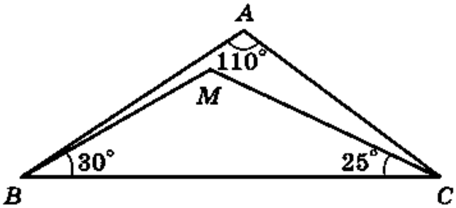

Рис. 32

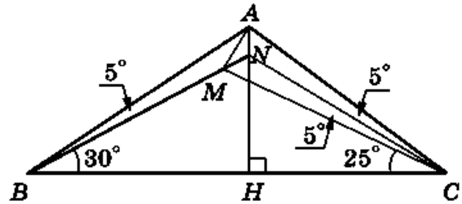

Рис. 33

Пример 4. Угол при вершине A равнобедренного треугольника с основанием BC равен 110°. Внутри этого треугольника отмечена точка M так, что $\angle CBM = 30°$ и $\angle BCM = 25°$ (рис. 32). Найдите угол AMC.

Решение. Пусть N — точка пересечения прямой BM и высоты AH (рис. 33). Углы B и C равны $\dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$, поэтому $\angle ACN = \angle ACH - \angle HCN = 35° - 30° = 5° = 30° - 25° = \angle HCN - \angle MCH = \angle MCN$ и $\angle CNA = 180° - 55° - 5° = 120° = \angle CNM$. Следовательно, треугольники CAN и CMN равны по общей стороне CN и прилегающим к ней углам. Таким образом, треугольник ACM равнобедренный, и углы при его основании равны $\dfrac{180° - 10°}{2} = 85°$.

Ответ: 85°.

Задачи

Угол треугольника выражается через сумму двух других углов

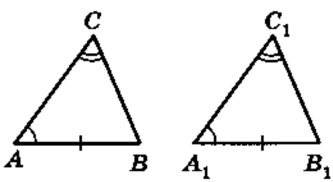

Рис. 34

7.1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, углы A и A_1 и углы C и C_1 (рис. 34). Могут ли эти треугольники быть неравными?

7.2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM = AC$ и $BN = BC$. Найдите угол NCM.

7.3. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Найдите угол C этого треугольника.

7.4. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса, проведённая из вершины третьего угла, равна удвоенной высоте, проведённой из той же вершины.

7.5. Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину C (рис. 35). Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB.

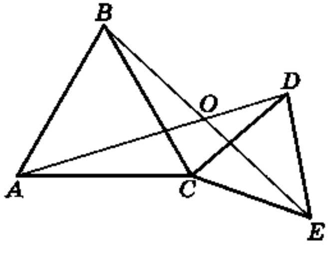

Рис. 35

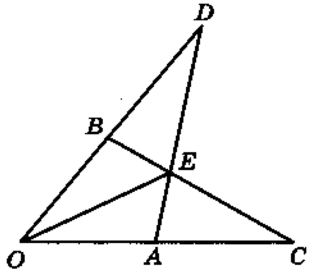

Рис. 36

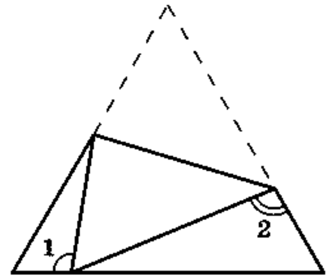

Рис. 37

7.6. На одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и C, на другой — точки B и D, отрезки AD и BC пересекаются в точке E (рис. 36). Докажите, что если $AC = BD$ и $\angle ADO = \angle BCO$, то луч OE является биссектрисой угла AOB.

7.7. Равносторонний треугольник перегнули так, что одна его вершина попала на противоположную сторону (рис. 37). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

Внешний угол треугольника

7.8. Внутри треугольника ABC отмечена точка O. Докажите, что $\angle AOC > \angle ABC$.

7.9. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка D так, что $\angle CAD : \angle DAB = 1 : 2$. Отрезок AD пересекает высоту BH в точке E. Докажите, что $DE = DC$.

7.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE. Докажите, что если $BC + CE = AB$, то $\angle C = 2\angle A$.

7.11. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM, если $\angle ACB = 35°$.

Равнобедренный треугольник

7.12. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75°. Найдите угол при основании.

7.13. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 36°$ и $\angle B = 108°$, проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что $AA_1 = 2BB_1$.

7.14. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены точки N и M ($BN < BM$) так, что $NM = AM$ и $\angle MAC = \angle BAN$. Найдите угол CAN.

7.15. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на боковых сторонах AB и BC — точки E и F так, что $DE = DF$. Докажите, что: а) если $\angle EDF = \angle A$, то $AE + FC = AC$; б) если $AE + FC = AC$, то $\angle EDF = \angle A$.

7.16. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $MB = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

7.17. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника отмечены точки D и K, а на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AE + AD = CK + CM = AB$. Отрезки DM и EK пересекаются в точке P. Найдите угол EPM.

Равнобедренный треугольник, составленный из равнобедренных треугольников

7.18. Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC равен 72°. Докажите, что биссектриса AD делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника.

7.19. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечена точка P так, что $CP = BC$. Найдите угол A, если $AP = CP$.

7.20. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечена точка P так, что $CP = BC$, а на стороне AC отмечена точка Q так, что $PQ = BC$. Найдите угол QPC, если угол A равен: а) 30°; б) 20°.

7.21. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечена точка P так, что $CP = BC$, а на стороне AC отмечена точка Q так, что $PQ = BC$. Найдите угол A, если $AQ = QP$.

7.22. Стороны AB и AC треугольника ABC равны. На стороне AB отмечены точки P и R, на стороне AC отмечена точка Q так, что $CP = PQ = QR = BC$. Найдите угол A, если $AR = BC$.

7.23. Угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 20°. На стороне AB отмечена точка D так, что $AD = BC$. Найдите угол BCD.

7.24. Равнобедренный треугольник ABC разбит отрезком AD на два равнобедренных треугольника ACD и ABD. Это можно сделать разными способами (рис. 38, *а—г*). Для каждого из этих способов найдите углы треугольника ABC.

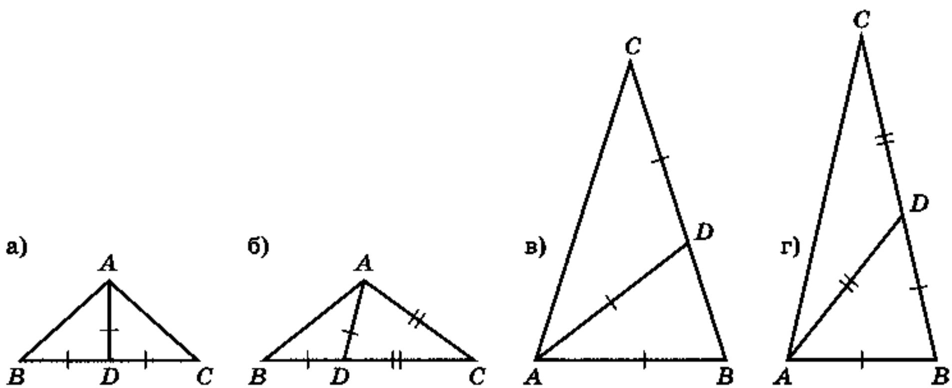

Рис. 38

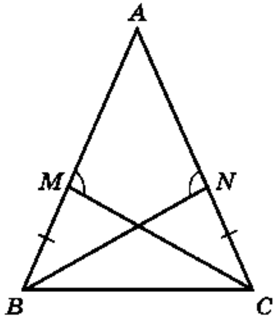

Рис. 39

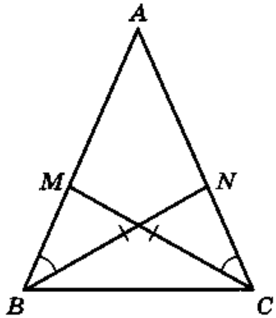

Рис. 40

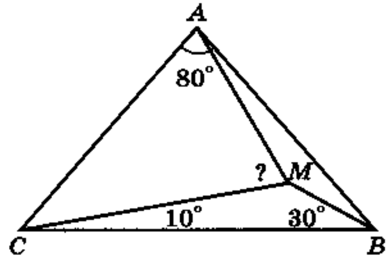

Рис. 41

Треугольники с двумя соответственно равными сторонами и равными углами не между ними

7.25. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Докажите, что $\angle C = \angle C_1$ или $\angle C + \angle C_1 = 180°$.

Замечание. В задаче 7.25 углы между соответственно равными сторонами — это углы B и B_1.

7.26. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1 \geqslant 90°$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Докажите, что эти треугольники равны.

7.27. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$ и $\angle AMC = \angle ANB$ (рис. 39). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

7.28. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BN = CM$ и $\angle ACM = \angle ABN$ (рис. 40). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

Вычисление углов в треугольниках

7.29. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и углом A, равным 80°, отмечена точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$ (рис. 41). Найдите угол AMC.

7.30. На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC с углом B, равным 20°, отмечены точки Q и P так, что $\angle ACQ = 60°$ и $\angle CAP = 50°$ (рис. 42). Найдите угол APQ.

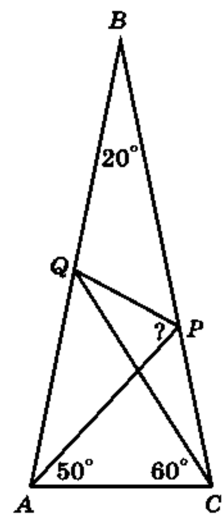

Рис. 42

Подсчёт суммы углов двумя способами

7.31. Может ли сумма любых двух углов треугольника быть больше 120°?

7.32. Точки A', B' и C' лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Известно, что $\angle AC'B' = \angle CA'B'$, $\angle CB'A' = \angle BC'A'$ и $\angle BA'C' = \angle AB'C'$. Докажите, что точки A', B' и C' — середины сторон треугольника ABC.

7.33. В квадрате отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники (на сторонах полученных треугольников нет отмеченных точек). Сколько при этом получилось треугольников?

8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Основные факты и понятия

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. В частности, для любой точки X биссектрисы BD треугольника ABC перпендикуляры, проведённые из точки X к прямым AB и BC, равны.

Каждая точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от его сторон, лежит на его биссектрисе. В частности, если точка X лежит внутри треугольника ABC и перпендикуляры, проведённые из неё к прямым AB и BC, равны, то точка X лежит на биссектрисе BD треугольника ABC.

Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC тогда и только тогда, когда угол A прямой (пример 3 на с. 18 и задача 7.3).

Примеры решения задач

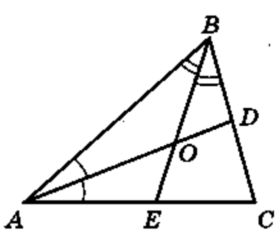

Рис. 43

Пример 1. Докажите, что биссектрисы треугольника имеют общую точку.

Решение. Пусть биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 43). Тогда точка O равноудалена от прямых AB и AC и от прямых BA и BC, поэтому она равноудалена от прямых CA и CB. При этом точка O лежит внутри треугольника ABC. Следовательно, она лежит на биссектрисе треугольника, проведённой из вершины C.

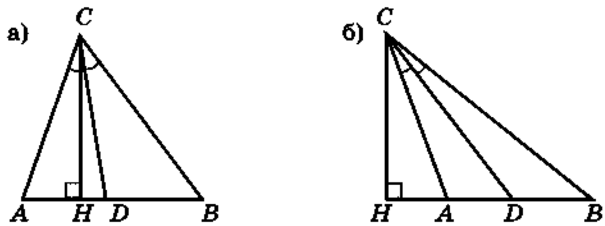

Рис. 44

Пример 2. Выразите через углы A и B угол между биссектрисой и высотой треугольника ABC, проведёнными из вершины C.

Решение. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC, CH — его высота. Если оба угла A и B острые и точка H лежит между точками A и D (рис. 44, *а*), то искомый угол равен $\frac{\angle C}{2} - 90° + \angle A = \frac{180° - \angle A - \angle B}{2} - 90° + \angle A = \frac{\angle A - \angle B}{2}$; если же точка H лежит между точками B и D, то искомый угол равен $\frac{\angle B - \angle A}{2}$. Если угол A тупой (рис. 44, *б*) или прямой, то искомый угол равен $\frac{\angle C}{2} - 90° + \angle A = \frac{\angle A - \angle B}{2}$, а если угол B тупой или прямой, то искомый угол равен $\frac{\angle B - \angle A}{2}$.

Ответ: $\frac{|\angle A - \angle B|}{2}$.

Пример 3. На продолжении медианы BM треугольника ABC за точку M отмечена точка B_1 так, что $MB_1 = MB$ (рис. 45). Докажите, что $\triangle AB_1M = \triangle CBM$ и $\triangle CB_1M = \triangle ABM$.

Решение. В треугольниках AB_1M и CBM равны стороны AM и CM, стороны B_1M и BM и углы AMB_1 и CMB, заключённые между этими сторонами. Равенство треугольников CB_1M и ABM доказывается аналогично.

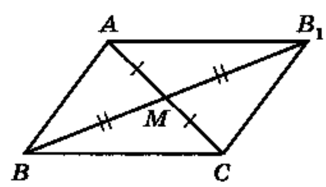

Рис. 45

Комментарий. Дополнительное построение, при котором на продолжении медианы BM треугольника ABC за точку M откладывается отрезок MB_1, равный медиане BM, часто используется при решении задач. Мы будем называть это построение *удвоением медианы*.

Задачи

Медиана, перпендикулярная биссектрисе

8.1. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой. Докажите, что одна из медиан этого треугольника перпендикулярна одной из биссектрис.

8.2. Одна из медиан треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис. Докажите, что одна из сторон этого треугольника вдвое больше другой.

Биссектриса и высота

8.3. Может ли биссектриса остроугольного треугольника быть вдвое больше высоты, проведённой из той же вершины?

8.4. В треугольнике ABC биссектриса AD, высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол A.

Медиана и высота

8.5. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Докажите, что $MH = \frac{1}{2}BC$.

8.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Докажите, что если $\angle MCA = 2\angle MAC$, то $AH = HM$.

Биссектриса

8.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Выразите угол ADB через углы A и C.

8.8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD и на стороне AB отмечена точка E так, что $BE = BD$. Докажите, что $ED = DC$.

8.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка E отмечена так, что отрезки DE и AB пересекаются в некоторой точке K, $AE = CD$ и $\angle EAB = \angle ACB$. Докажите, что $EK = KD$.

Высоты

8.10. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что середина O отрезка CH равноудалена от точек A_1 и B_1.

8.11. Докажите, что высоты остроугольного треугольника лежат внутри треугольника.

8.12. Докажите, что для тупоугольного треугольника высота, проведённая из вершины тупого угла, лежит внутри треугольника, а высоты, проведённые из вершин острых углов, лежат вне треугольника.

8.13. Высота AH треугольника ABC не меньше стороны BC, а высота BD не меньше стороны AC. Найдите углы треугольника ABC.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке

8.14. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

8.15. Точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и AC треугольника ABC за точки B и C, биссектрисы углов DBC и ECB пересекаются в точке O (рис. 46). Докажите, что биссектриса угла BAC проходит через точку O.

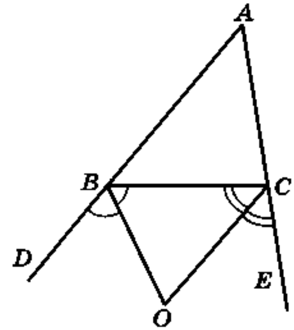

Рис. 46

8.16. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки K, M и N так, что $\angle MKB = \angle MNC$ и $\angle KMB = \angle KNA$. Докажите, что луч NB — биссектриса угла KNM (рис. 47).

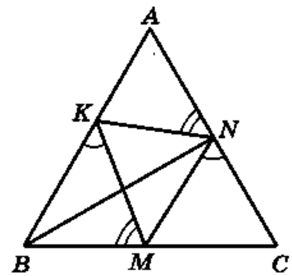

Рис. 47

8.17. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90°$.

8.18. Биссектрисы треугольника ABC, в котором $\angle A = 120°$, пересекаются в точке O. На лучах BA и CA отложены отрезки BP и CQ, равные стороне BC. Докажите, что $\angle POQ = 90°$.

8.19. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и углом A, равным $80°$, отмечена точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCA = 10°$ (рис. 48). Найдите угол MAB.

8.20. Углы B и C треугольника ABC равны $70°$ и $50°$. На сторонах AB и AC отмечены точки M и N так, что $\angle MCB = 40°$ и $\angle NBC = 50°$ (рис. 49). Найдите угол NMC.

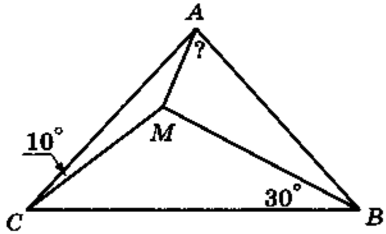

Рис. 48

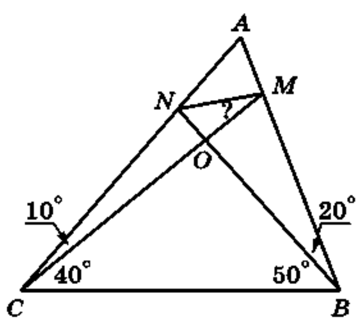

Рис. 49

Удвоение медианы

8.21. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

8.22. Может ли одна биссектриса треугольника делить пополам другую биссектрису?

8.23. На медиане BM треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle CDM = \angle ABM$. Докажите, что $CD = AB$.

8.24. Сумма углов A и C треугольника ABC, в котором проведена медиана BM, равна углу ABM. Докажите, что $BC = 2BM$.

8.25. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

8.26. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

8.27. Медиана BM треугольника ABC вдвое меньше стороны AB, $\angle ABM = 40°$. Найдите угол ABC.

8.28. Медиана BM треугольника ABC в 4 раза меньше стороны AB, $\angle ABM = 60°$. Найдите угол ABC.

Равные отрезки биссектрис

8.29. Угол B треугольника ABC равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

8.30. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны $40°$, BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

8.31. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OD = OE$, то либо этот треугольник равнобедренный, либо его угол B равен $60°$.

9. Окружность и круг

Основные факты и понятия

Окружностью называют фигуру, состоящую из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данную точку называют *центром* окружности, а заданное расстояние — *радиусом* окружности.

Отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через центр окружности, называют *диаметром*. Диаметр окружности вдвое больше радиуса.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*.

Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны проходят через концы диаметра, прямой.

Если диаметром окружности является гипотенуза прямоугольного треугольника, то вершина прямого угла этого треугольника лежит на окружности.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что прямая не может пересекать окружность в трёх точках.

Решение. Предположим, что три точки A, B, C окружности с центром O лежат на прямой l. Тогда точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Середины отрезков AB и BC не совпадают, поэтому из точки O можно провести два перпендикуляра к прямой l. Это противоречит тому, что из данной точки можно провести только один перпендикуляр к данной прямой, поэтому предположение неверно.

Пример 2. Докажите, что можно провести окружность, проходящую через все вершины данного прямоугольника.

Решение. Рассмотрим окружность, диаметром которой служит диагональ AC прямоугольника $ABCD$. Углы ABC и ADC прямые, поэтому точки B и D лежат на этой окружности.

Пример 3. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других его сторон.

Решение. Середины M и N сторон AC и BC равностороннего треугольника ABC являются основаниями высот, проведённых из вершин B и A. Поэтому углы AMB и ANB прямые, а значит, точки M и N лежат на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

Задачи

Концы хорды равноудалены от центра окружности

9.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $O_1O_2 \perp AB$.

9.2. Докажите, что две окружности не могут пересекаться в трёх точках.

9.3. Две окружности имеют общий центр. Прямая пересекает обе окружности. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между окружностями, равны.

9.4. Диаметр окружности проходит через середину хорды. Докажите, что эта хорда либо перпендикулярна диаметру, либо сама является диаметром.

9.5. Две хорды окружности делят друг друга пополам. Докажите, что их общая точка — центр окружности.

9.6. Диаметр окружности пересекает хорду под углом 45° и делит её на отрезки, равные 5 и 11. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

9.7. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки, равные 5 и 13. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

Равные прямоугольные треугольники в окружности

9.8. Докажите, что хорды окружности, удалённые от её центра на равные расстояния, равны.

9.9. Через точку P проведены две прямые, на которых окружность высекает равные хорды AB и CD (точка A лежит между P и B, точка C лежит между P и D). Докажите, что $PA = PC$.

Перпендикулярные хорды

9.10. Две пересекающиеся хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

9.11. Две перпендикулярные хорды окружности пересекаются, и каждая из них делится точкой пересечения на два отрезка длиной 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой из этих хорд.

Угол, опирающийся на диаметр

9.12. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

9.13. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

9.14. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, высекает на двух других сторонах треугольника равные отрезки. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

9.15. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N, отличных от точки A. Докажите, что $AM = AN$.

9.16. Докажите, что любая хорда окружности не превосходит её диаметра.

9.17. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 6 и $\angle A = 30°$. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите CK.

9.18. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите острые углы треугольника.

9.19. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от точки A. Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

9.20. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что середина стороны AB равноудалена от точек A_1 и B_1.

9.21. Докажите, что прямоугольный треугольник с гипотенузой c можно полностью накрыть тремя кругами диаметром $\frac{c}{2}$.

9.22. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что $BP = BQ$, из точки B проведён перпендикуляр BH к прямой CP. Докажите, что угол DHQ прямой (рис. 50).

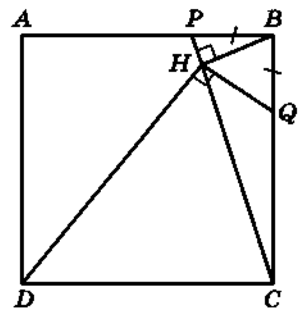

Рис. 50

Количество частей

9.23. На какое число частей могут разбивать круг две хорды?

9.24. На какое число частей могут разбивать круг три хорды?

9.25. На какое наибольшее и какое наименьшее число частей могут разбивать круг четыре хорды?

9.26. На какое наибольшее число областей могут разбивать плоскость три окружности?

9.27. На какое наибольшее число областей могут разбивать плоскость четыре окружности?

10. Задачи на построение

Основные факты и понятия

С помощью линейки можно построить прямую, проходящую через две данные точки и отрезок с концами в двух данных точках.

С помощью циркуля можно построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Под построениями подразумеваются построения с помощью циркуля и линейки. Если имеются в виду построения, использующие другой набор инструментов, то это специально оговаривается.

Базовые задачи на построение, которыми можно пользоваться без пояснений (но при этом нужно уметь их решать):

- на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному;
- построить треугольник по трём сторонам;
- отложить от данного луча угол, равный данному углу;
- построить биссектрису данного неразвёрнутого угла;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

Помимо циркуля и линейки, при построениях могут использоваться другие инструменты (их использование всегда оговаривается). Мы приведём несколько задач на построение с помощью прямоугольного чертёжного угольника.

Примеры решения задач

Пример 1. Нарисована окружность, но её центр не отмечен. Постройте центр этой окружности.

Решение. Отметим на окружности три точки A, B и C. Центр окружности — это точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC.

Пример 2. Постройте треугольник ABC по стороне AB, углу A и сумме сторон $AC + CB$ (рис. 51, *а*).

Решение. Продолжим сторону AC треугольника ABC на отрезок CD, равный стороне BC (рис. 51, *б*). В треугольнике ABD известны стороны AB и $AD = AC + CB$ и угол A между ними, поэтому его можно построить. Серединный перпендикуляр к стороне BD пересекает сторону AD в искомой точке C.

Пример 3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету (рис. 52, *а*).

Решение. Сначала построим окружность, диаметром которой служит данная гипотенуза AB, а затем построим окружность с центром A, ради-

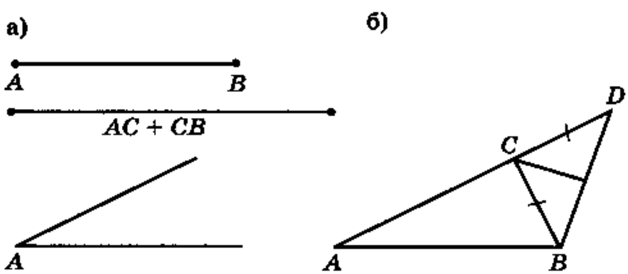

Рис. 51

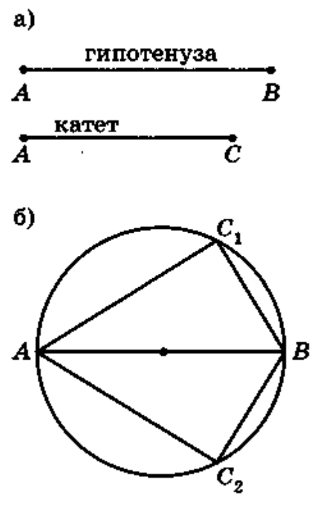

Рис. 52

ус которой равен данному катету. Точки C_1 и C_2, в которых пересекаются построенные окружности (рис. 52, *б*), являются вершинами искомых треугольников ABC_1 и ABC_2.

Задачи

Применение базовых задач

10.1. Через данную точку внутри окружности проведите хорду, которая делится этой точкой пополам.

10.2. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и BC и углу A.

10.3. Через данную точку внутри угла проведите прямую, пересекающую стороны угла в точках, равноудалённых от вершины угла.

10.4. Впишите в данную окружность квадрат.

10.5. Впишите в данную окружность равносторонний треугольник.

Продолжение отрезка

10.6. Постройте треугольник ABC по стороне BC, сумме сторон $AB + AC$ и разности углов $\angle C - \angle B$.

10.7. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

10.8. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

10.9. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

Комментарий. Отрезок AB можно продолжить на данный отрезок CD, т. е. отложить на луче AB отрезок AF, равный $AB + CD$. Можно также уменьшить отрезок AB на данный отрезок CD (если $AB > CD$), т. е. отложить на луче AB отрезок AF, равный $AB - CD$. В обоих случаях $BF = CD$. Уменьшение отрезка используется при решении задачи 10.10.

10.10. Постройте треугольник ABC по углам A и B и разности сторон $AC - BC > 0$.

Удвоение медианы

10.11. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

10.12. Постройте треугольник по медиане и двум углам, на которые она разбивает угол треугольника.

Угол, опирающийся на диаметр

10.13. Постройте треугольник ABC по стороне AB, медиане CM и высоте CH.

10.14. Постройте треугольник ABC по углу A, биссектрисе AD и высоте AH.

10.15. Постройте треугольник ABC по стороне AB, высоте AH и медиане AM.

10.16. Постройте треугольник ABC по сторонам AB, AC и высоте AH.

10.17. Внутри окружности даны две точки. Постройте прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на окружности, а катеты проходят через данные точки.

10.18. Постройте треугольник ABC по прямой l, на которой лежит сторона AB, и точкам A_1 и B_1 — основаниям высот, проведённых из вершин A и B.

10.19. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Постройте прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB.

Построения с помощью чертёжного угольника

Прямоугольный чертёжный угольник позволяет выполнить следующие элементарные построения:

а) расположить прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая сторона проходила через данную точку;

б) расположить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на данной прямой, а стороны проходили через две данные точки.

Расположив прямой угол одним из указанных способов, можно провести лучи, соответствующие его сторонам. В частности, можно построить вершину этого прямого угла.

10.20. Нарисована окружность, но её центр не отмечен. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте центр этой окружности.

10.21. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте середину данного отрезка AB.

10.22. Дан отрезок AB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте отрезок AC, серединой которого является точка B.

10.23. Дан угол AOB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте угол, вдвое больший угла AOB.

10.24. Дан угол AOB. С помощью одного лишь чертёжного угольника постройте угол, вдвое меньший угла AOB.

11. Параллельные прямые

Основные факты и понятия

Две прямые на плоскости называют *параллельными*, если они не пересекаются.

Если при пересечении двух прямых секущей *накрест лежащие* углы равны (рис. 53), то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

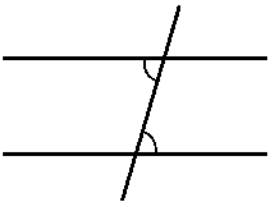

Рис. 53

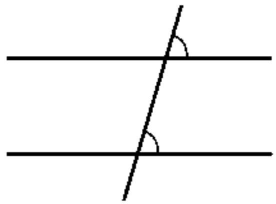

Рис. 54

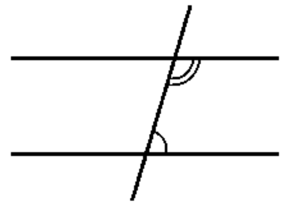

Рис. 55

Если при пересечении двух прямых секущей *соответственные* углы равны (рис. 54), то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма *односторонних* углов (рис. 55) равна 180°, то эти прямые параллельны. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называют *расстоянием* между этими прямыми. Множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, есть прямая, параллельная данной.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и на стороне AB отмечена точка E так, что $ED \parallel AC$. Докажите, что $AE = ED$.

Решение. Биссектриса AD делит угол A пополам, поэтому $\angle EAD = \angle DAC$. Накрест лежащие углы $\angle DAC$ и $\angle EDA$ равны. Следовательно, $\angle EAD = \angle EDA$. Таким образом, треугольник ADE равнобедренный и $AE = ED$.

Пример 2. На плоскости проведено 5 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что две из этих прямых образуют угол, не превосходящий 36°.

Решение. Проведём через некоторую точку прямые, параллельные данным прямым. Эти прямые разделяют плоскость на 5 пар вертикальных углов, поэтому угол между некоторыми двумя из этих прямых не превосходит $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Прямые, параллельные этим двум прямым, тоже образуют угол, не превосходящий 36°.

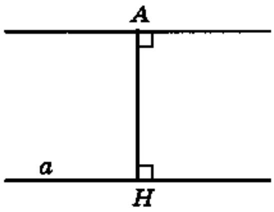

Рис. 56

Пример 3. Через данную точку A проведите прямую, параллельную данной прямой a.

Решение. Сначала проведём перпендикуляр AH к прямой a, а затем через точку A проведём перпендикуляр к прямой AH (рис. 56). При пересечении прямой a и построенной прямой секущей AH образуются прямые углы, поэтому эти прямые параллельны.

Пример 4. Через данную точку проведите прямую, образующую равные углы с двумя данными пересекающимися прямыми.

Решение. Прямые, проходящие через вершину угла, образованного данными прямыми, и образующие с этими прямыми равные углы, — это биссектрисы углов, образованных данными прямыми. Поэтому искомая прямая проходит через данную точку параллельно одной из биссектрис. Задача имеет два решения.

Задачи

Точки пересечения прямых

11.1. Могут ли четыре прямые иметь ровно пять точек пересечения?

11.2. Могут ли четыре прямые иметь ровно три точки пересечения?

11.3. Могут ли четыре прямые, ровно две из которых параллельны, иметь ровно три точки пересечения?

11.4. Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?

11.5. Можно ли расположить на плоскости девять прямых так, чтобы каждая из них пересекала ровно шесть других?

Биссектриса

11.6. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. На стороне BC отмечены точки D и E так, что $DO \parallel AB$ и $EO \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника OED равен отрезку BC.

11.7. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O параллельно стороне BC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $PQ = BP + CQ$.

11.8. Секущая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B. Биссектрисы образовавшихся углов с вершиной B пересекают прямую a в точках C и D. Докажите, что точка A — середина отрезка CD.

11.9. Через точку пересечения биссектрисы угла B треугольника ABC и биссектрисы внешнего угла с вершиной C проведена прямая, параллельная стороне BC. Она пересекает прямые AB и AC в точках M и N. Докажите, что $MN = |BM - CN|$.

11.10. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC с вершиной A параллельна стороне BC. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

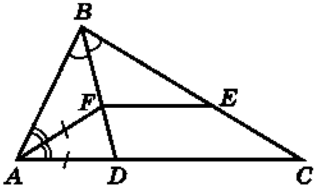

Рис. 57

11.11. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F так, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$ (рис. 57). Докажите, что $AB = BE$.

11.12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $AE = ED = DC$.

11.13. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы CD и C_1D_1. Известно, что $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$ и $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Разные задачи

11.14. При пересечении прямых a и b секущей образовалось восемь углов, четыре из которых равны 70°, а четыре других равны 110°. Обязательно ли прямые a и b параллельны?

11.15. При пересечении прямых a и b секущей образовалось восемь равных углов. Обязательно ли прямые a и b параллельны?

11.16. Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то $a \parallel b$.

11.17. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает эти окружности в точках M и N. Докажите, что $MN = BC$.

11.18. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка N так, что $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

11.19. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Докажите, что если $AH = BC$, то биссектриса угла B, высота AD и прямая, проходящая через точку H параллельно стороне BC, пересекаются в одной точке.

Построения

11.20. Постройте треугольник ABC по стороне AB, высоте CH и медиане AM.

11.21. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы три точки — основания его биссектрис.

11.22. На стороне OA острого угла AOB отмечена точка C. Постройте на этой же стороне точку D, равноудалённую от точки C и прямой OB.

Ответы

1.1. Одну, четыре или шесть. **1.2.** Одну, пять, шесть, восемь или десять. **1.3.** 1 или 3. **1.4.** 1, 4 или 6. **1.5.** 1, 5, 6, 8 или 10. **1.6.** В 15 точках. **1.7.** В $\frac{n(n-1)}{2}$ точках. **1.8.** 6. **1.9.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **1.10.** б) Нет. **1.11.** б) Нет. **1.12.** Да. Нет. **1.13.** Да. **1.15.** Да. **1.16.** Нет. **1.17.** 10 или 22. **1.18.** На 8, 10 или 11. **1.19.** На 10, 13, 14, 15 или 16. **2.1.** 4 или 2. **2.3.** Нет. **2.4.** Да. **2.5.** Нет. **2.6.** Рядом с домом, расположенным между двух домов. **2.7.** В любой точке между C и D. **2.9.** Нет. **2.13.** 70°. **2.14.** 110°. **2.16.** $\frac{\alpha+\beta}{2}$ или $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$. **2.17.** 90°. **2.18.** а) 105°; б) 80°. **2.19.** а) Острый; б) тупой. **2.20.** 15° или 165°. **2.21.** 82,5° или 97,5°. **2.22.** 44 раза. **2.28.** Можно. **2.29.** Нет. **3.1.** 90°. **3.2.** 60°. **5.12.** 90°. **5.13.** Да. **5.14.** Да. **5.15.** Да. **5.16.** Да. **6.8.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$. **6.10.** 1 : 3. **6.11.** 90°, 60° и 30°. **6.15.** 90°. **6.26.** 1. **6.29.** 15°, 15° и 150°. **6.30.** 75°, 75° и 30°. **6.34.** 30°. **6.36.** 90°. **6.37.** 45°. **6.38.** 45°. **6.39.** 90°. **6.40.** 90°. **7.1.** Нет. **7.2.** 45°. **7.3.** 90°. **7.5.** 60°. **7.11.** 35°. **7.12.** 70° или 50°. **7.14.** 60°. **7.17.** 60°. **7.19.** 36°. **7.20.** а) 90°; б) 60°. **7.21.** $\frac{180°}{7}$. **7.22.** 20°. **7.23.** 70°. **7.24.** а) 90°, 45°, 45°; б) 108°, 36°, 36°; в) 72°, 72°, 36°; г) $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{180°}{7}$. **7.29.** 70°. **7.30.** 80°. **7.31.** Нет, не может. **7.33.** 22. **8.3.** Не может. **8.4.** 60°. **8.7.** $\frac{\angle C - \angle A}{2} + 90°$. **8.13.** $\angle A = \angle B = 45°$, $\angle C = 90°$. **8.19.** 60°. **8.20.** 30°. **8.22.** Нет. **8.27.** 110°. **8.28.** 150°. **9.6.** 3. **9.7.** 2. **9.11.** Расстояние до каждой из хорд равно 2. **9.17.** 3. **9.18.** 45° и 45°. **9.23.** На 3 или на 4. **9.24.** На 4, 5, 6 или 7. **9.25.** Наибольшее число частей равно 11, наименьшее 5. **9.26.** На 8 частей. **9.27.** На 14 частей. **11.1.** Да. **11.2.** Да. **11.3.** Да. **11.4.** Да. **11.5.** Да. **11.14.** Нет. **11.15.** Да.

Указания

1. Прямая и отрезок, луч и угол

1.1. Возможны следующие случаи (рис. 58): 1) все четыре прямые проходят через одну точку; 2) три прямые проходят через одну точку, а четвёртая прямая пересекает их в трёх других точках; 3) никакие три прямые не проходят через одну точку. **1.2.** Возможны следующие случаи (рис. 59): 1) все пять прямых проходят через одну точку; 2) четыре прямые проходят через одну точку, а пятая прямая не проходит через эту точку; 3) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту

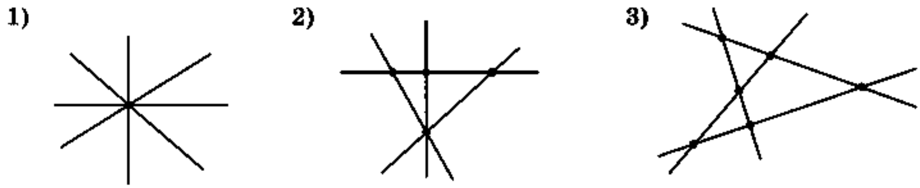

Рис. 58

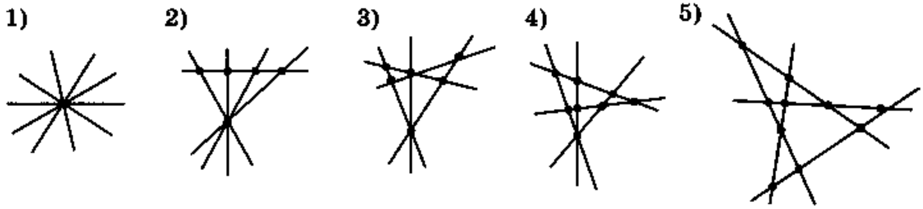

Рис. 59

точку не проходят, но точка пересечения этих двух прямых лежит на одной из трёх первых прямых; 4) три прямые проходят через одну точку, а две оставшиеся прямые через эту точку не проходят, причём точка пересечения этих двух прямых не лежит ни на одной из трёх первых прямых; 5) никакие три прямые не проходят через одну точку. **1.3.** Возможны два случая: 1) точки лежат на одной прямой; 2) точки не лежат на одной прямой. **1.4.** Возможны следующие случаи (рис. 60): 1) точки лежат на одной прямой; 2) три точки лежат на одной прямой, а четвёртая точка не лежит на этой прямой; 3) никакие три из данных точек не лежат на одной прямой. **1.5.** Возможны следующие случаи (рис. 61): 1) все пять точек лежат

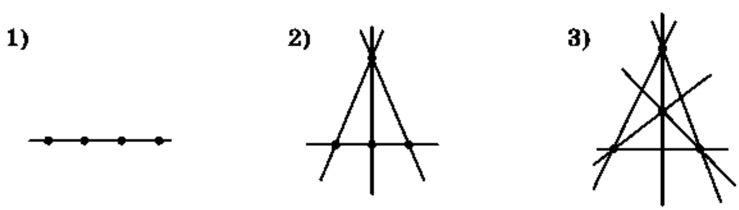

Рис. 60

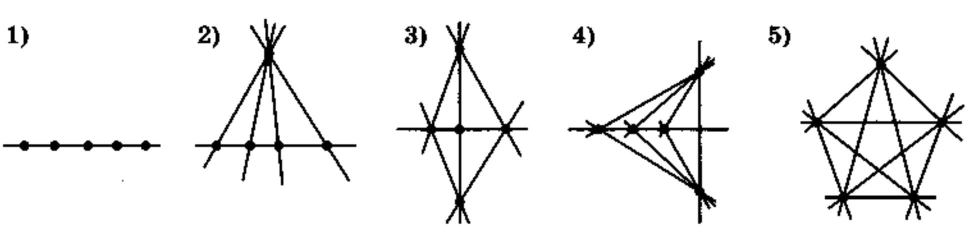

Рис. 61

на одной прямой; 2) четыре точки лежат на одной прямой, а пятая не лежит на этой прямой; 3) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, но содержащая их прямая проходит через одну из трёх первых точек; 4) три точки лежат на одной прямой, а две оставшиеся точки не лежат на одной прямой, причём содержащая их прямая не проходит ни через одну из трёх первых точек; 5) никакие три точки не лежат на одной прямой. **1.6.** Из шести прямых можно составить 15 пар. **1.7.** Первую прямую можно выбрать n способами, после этого вторую прямую можно выбрать $n - 1$ способом. При этом каждую точку пересечения прямых мы посчитаем дважды. **1.8.** Из четырёх точек можно составить 6 пар. **1.9.** Один конец отрезка можно выбрать n способами, после этого другой конец отрезка можно выбрать $n - 1$ способом. При этом каждый отрезок мы посчитаем дважды. **1.10.** а) Точки A и D лежат на прямой BC. б) Точки B и C могут совпадать и не лежать на прямой AD (рис. 62). **1.11.** а) Прямые a и d проходят через точку пересечения прямых b и c. б) Прямые b и c могут совпадать и не проходить через точку пересечения прямых a и d (рис. 63). **1.12.** Точки A, C и E лежат по одну сторону от данной прямой, а точки B и D — по другую (рис. 64). **1.13.** Точка B и отрезок AC лежат по разные стороны от прямой l (рис. 65). **1.14.** Пусть O — точка пересечения отрезков AB и CD. Тогда отрезки OD и OB не пересекают прямую AC (рис. 66), поэтому точки O, B и D лежат по одну сторону от прямой AC. **1.15.** По одну сторону от прямой могут лежать 4 отмеченные точки, а по другую сторону — 5 отмеченных точек. **1.16.** Если m отмеченных точек лежит по одну сторону от прямой и $10 - m$ — по другую, то прямая пересекает ровно $m(10 - m)$ отрезков. Число 20 нельзя представить в виде произведения двух чисел, сумма которых равна 10. **1.17.** По разные стороны от прямой лежит либо 7 точек и 3 точки, либо 1 точка и 21 точка. **1.18.** См. указание к задаче 1.1. **1.19.** См. указание к задаче 1.2.

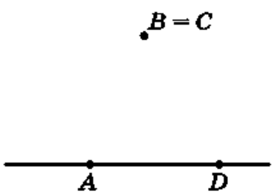

Рис. 62

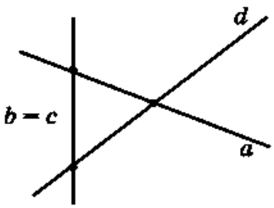

Рис. 63

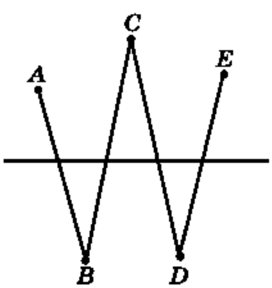

Рис. 64

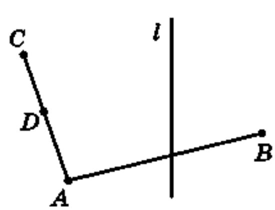

Рис. 65

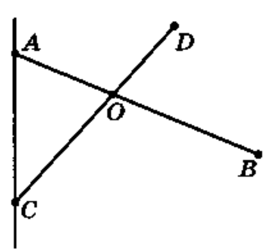

Рис. 66

2. Сравнение и измерение отрезков и углов

2.1. Возможны два случая: 1) точка C лежит на отрезке AB; 2) точка C не лежит на отрезке AB. **2.2.** Если точки B и C лежат по одну сторону от точки A, то $MN = \frac{|AB - AC|}{2} = \frac{BC}{2}$. Если точки B и C лежат по разные стороны от точки A, то $MN = \frac{AB + AC}{2} = \frac{BC}{2}$. **2.3.** Середины двух отрезков с общим концом не могут совпадать. **2.4.** На отрезке AD отметьте точки B и C так, что $AB = CD$. **2.5.** Если середины трёх отрезков совпадают, то по обе стороны от общей середины лежат по три конца отрезков. **2.6.** Пусть дома A и B расположены с края, дом C расположен между ними. Для любой точки X отрезка AB сумма расстояний от точки X до точек A и B равна $AX + XB = AB$. Поэтому наименьшим должно быть расстояние от точки X до точки C. **2.7.** Сумма расстояний до точек A и B одна и та же для всех точек отрезка AB, а сумма расстояний до точек C и D равна CD для точек на отрезке CD и больше CD для точек вне отрезка CD. **2.8.** Сложите 8 равенств $A_1A_2 + A_2A_{10} = A_1A_{10}$, ... , $A_1A_9 + A_9A_{10} = A_1A_{10}$. **2.9.** Для точки X, лежащей вне отрезка AB, выполняется равенство $XA - XB = \pm d$, где d — длина отрезка AB. Сумма нечётного количества чисел $\pm d$ не может быть равной нулю. **2.10.** 7 см = 2 · 8 см − 3 · 3 см. **2.11.** а) 11 см − 7 см = 4 см, 4 см + 4 см = 8 см. б) 8 см − 7 см = 1 см. **2.12.** а) 4 · 17 см − 5 · 13 см = 3 см. б) 4 · 13 см − 3 · 17 см = 1 см. в) Можно воспользоваться тем, что 9 см = 3 · 3 см, или тем, что 9 см = 9 · 1 см. **2.13.** Из условия задачи следует, что луч OC расположен внутри угла AOB (рис. 67). **2.14.** Из условия задачи следует, что луч OC расположен вне угла AOB (рис. 68). **2.15.** Рассмотрите угол AOB и его биссектрису OM. Есть два луча ON_1 и ON_2, образующих прямой угол с лучом OM (рис. 69). Биссектрисой угла BOC может быть только луч ON_1, поскольку $2\angle BON_2 > 180°$. При этом $\angle AOC = 180°$. **2.16.** Лучи OA и OB лежат либо по одну сторону от прямой OC, либо по разные стороны. **2.17.** Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$, $\angle COD = 2\gamma$. По условию $2\alpha + 2\gamma = 180°$. На биссектрисах углов AOC и BOD или на их продолжениях можно выбрать точки K и M так, что $\angle KOC = \alpha + \beta$

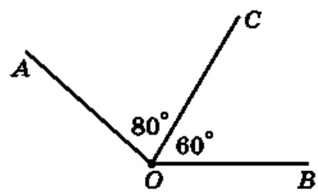

Рис. 67

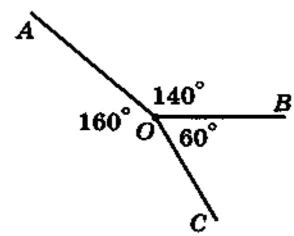

Рис. 68

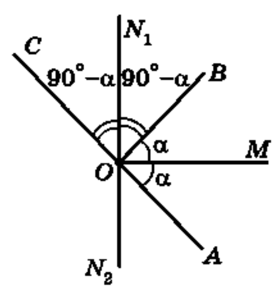

Рис. 69

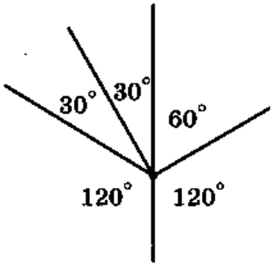

Рис. 70

и $\angle BOM = \beta + \gamma$. Поэтому $\angle KOM = \angle KOC + \angle BOM - \angle BOC = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) - 2\beta = \alpha + \gamma = 90°$. **2.18.** а) За 30 мин часовая стрелка повернётся на 15°. б) За 40 мин часовая стрелка повернётся на 20°. **2.19.** В 3 часа стрелки часов образуют прямой угол. Минутная стрелка движется быстрее часовой. **2.20.** За час минутная стрелка возвращается в исходное положение, а часовая поворачивается на 30°. В начальный момент угол между стрелками может либо увеличиваться, либо уменьшаться. **2.21.** За полчаса минутная стрелка поворачивается на 180°, а часовая на 15°. В начальный момент угол между стрелками может либо увеличиваться, либо уменьшаться. **2.22.** За 12 часов минутная стрелка совершает 12 оборотов, а часовая один оборот, поэтому минутная стрелка обгоняет часовую 11 раз. Следовательно, моменты совпадения стрелок разбивают время от полуночи до полудня (и от полудня до полуночи) на 11 равных отрезков. На каждом таком отрезке стрелки два раза перпендикулярны (когда минутная стрелка впереди и когда позади часовой на 90°). **2.23.** $20° = 180° - 4 \cdot 40°$. **2.24.** $40° = 180° - 2 \cdot 70°$. **2.25.** $1° = 19 \cdot 19° - 360°$. **2.26.** На отрезке длиной 12 нужно последовательно отложить отрезки длиной 2, 3 и 7. **2.27.** На отрезке длиной 12 нужно последовательно отложить отрезки длиной 3, 2 и 7. **2.28.** Пример требуемого расположения лучей приведён на рисунке 70. **2.29.** Если отрезок длиной $a + b + c$ разделён последовательно на отрезки длиной a, b и c, то сумма попарных расстояний равна $3(a + b + c) + b$. В рассматриваемом случае сумма попарных расстояний равна 37 и $a + b + c = 12$.

3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы

3.1. Если смежные углы равны 2α и 2β, то угол между их биссектрисами равен $\alpha + \beta$. **3.2.** Сумма отмеченных углов и соответствующих им вертикальных углов равна 360°. **3.3.** Пусть каждый из вертикальных углов равен 2α, а каждый из смежных с ними углов равен 2β. Тогда угол между биссектрисами этих вертикальных углов равен $\alpha + 2\beta + \alpha = 180°$. **3.4.** Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

4. Равнобедренный треугольник

4.1. Пусть $\angle A = 2\alpha$. Тогда $\angle OAC = \alpha = \angle OCA$. **4.2.** Пусть точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Тогда отрезок BM — медиана равнобедренного треугольника, поэтому $BM \perp AC$. Таким образом, точка B лежит на прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой AC. **4.3.** Пусть точка O — середина отрезка AC. Тогда $AC \perp BO$ и $AC \perp OD$. **4.4.** Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle B = \angle BAM$. Аналогично $\angle C = \angle CAM$. Поэтому $\angle A = \angle BAM + \angle CAM = \angle B + \angle C$.

5. Признаки равенства треугольников

5.1. Пусть биссектриса BD треугольника ABC является также и его высотой. Тогда треугольники ADB и CDB равны: сторона BD у них общая, и к ней прилегают равные углы. **5.2.** Пусть высота BH треугольника ABC является также и его медианой. Тогда треугольники AHB и CHB равны: углы с вершиной H у них равны, и эти углы заключены между соответственно равными сторонами. **5.3.** Треугольник AOC равнобедренный, поэтому $\angle OAC = \angle OCA$. Треугольники AOM и CON равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle OAM = \angle OCN$. **5.4.** Докажите сначала, что треугольники OBA и OBC равны по стороне и прилежащим к ней углам. **5.5.** Докажите, что $\triangle AMD = \triangle CME$ и $\triangle ACE = \triangle CAD$. **5.6.** Воспользуйтесь тем, что $\angle ABM = \angle AMB = \angle CNB = \angle CBN$. **5.7.** Сначала докажите равенство углов BKC и BAL (рис. 71), а затем равенство треугольников ABL и KBC. **5.8.** Треугольники ABD и ABE равны. Если точка C лежит на луче AB, то $\angle CAD = \angle BAD = \angle BAE = \angle CAE$. Если точка C лежит на продолжении луча AB, то $\angle CAD = 180° - \angle BAD = 180° - \angle BAE = \angle CAE$. В обоих случаях $\angle CAD = \angle CAE$, поэтому $\triangle CAD = \triangle CAE$. **5.9.** Пусть F и G — точки пересечения отрезка CE с отрезками DB и DA (рис. 72). Сначала докажите, что $\triangle ACG = \triangle BEF$ (по стороне и прилежащим к ней углам), а затем докажите, что $DF = DG$. **5.10.** Сначала докажите равенство треугольников ABO и OCM (по двум сторонам и углу между ними, рис. 73), а затем воспользуйтесь равенством углов AOK и MOC. **5.11.** Пусть точка M — середина отрезка BC (рис. 74). Тогда $\triangle LBK = \triangle MBK$ (по двум сторонам и углу между ними) и $\triangle KMC = \triangle ALB$ (по двум сторонам и углу между ними). **5.12.** Пусть M — середина стороны

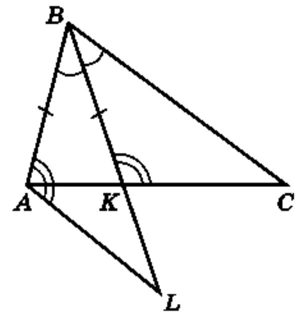

Рис. 71

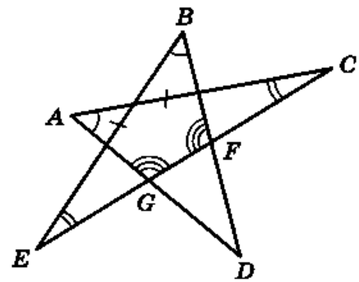

Рис. 72

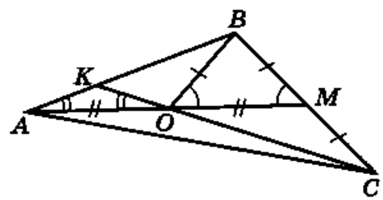

Рис. 73

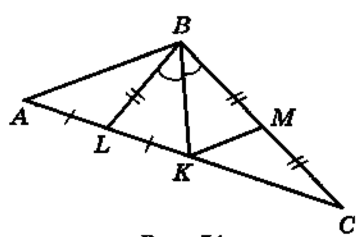

Рис. 74

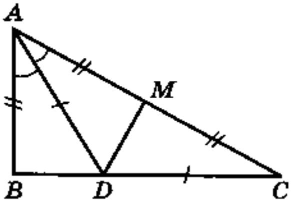

Рис. 75

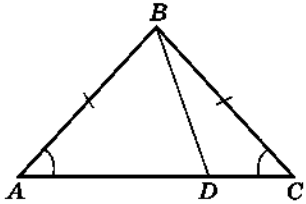

Рис. 76

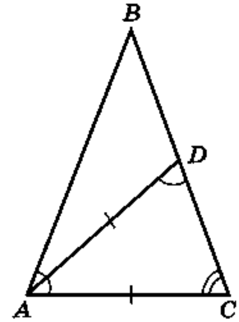

Рис. 77

AC (рис. 75). Треугольники ABD и AMD равны (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $\angle ABD = \angle AMD = 90°$. **5.13.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC, отметьте точку D на его основании AC (или на продолжении основания) и рассмотрите треугольники ABD и CBD (рис. 76). **5.14.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC, отметьте точку D на его основании AC и рассмотрите треугольники ABD и CBD (см. рис. 76). **5.15.** Возьмите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, отметьте точку D на стороне BC так, что $AD = AC$, и рассмотрите треугольники ABC и CAD (рис. 77). **5.16.** Проведите высоты AN_1 и CM_1 и отметьте точку M на отрезке BM_1 и точку N на отрезке CN_1 так, что $MM_1 = NN_1$ (рис. 78).

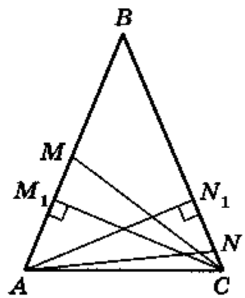

Рис. 78

6. Прямоугольные треугольники

6.1. Прямоугольные треугольники, которые отрезают данные медианы, равны по гипотенузе и катету. **6.2.** Из равенства противолежащих катетам острых углов следует равенство прилежащих к ним углов. **6.3.** Пусть высоты AH и CK треугольника ABC равны. Тогда прямоугольные треугольники ABH и CBK равны по катету и противолежащему острому углу. **6.4.** В треугольнике CDK углы при вершинах D и K равны $90° - \frac{1}{2}\angle A$. **6.5.** В треугольнике CBD углы при вершинах C и D равны $90° - \frac{1}{2}\angle B$. **6.6.** Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$, O — точка пересечения биссектрис углов BAC и BCH. Тогда в треугольнике AOC углы при вершинах A и C равны α и $2\beta + \alpha$. **6.7.** Пусть точка M — середина стороны BC (рис. 79). Тогда $\angle AMB = 90° + \frac{1}{2}C = \angle ACE$, поэтому

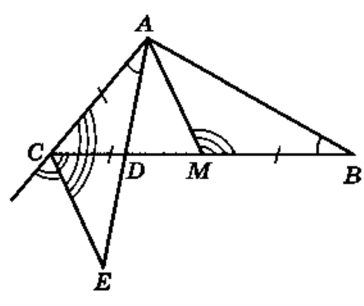

Рис. 79

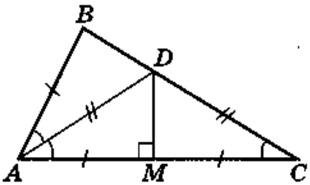

Рис. 80

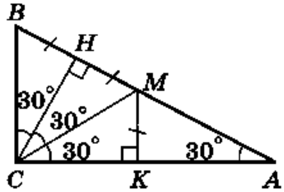

Рис. 81

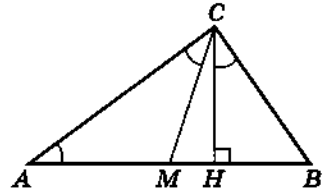

Рис. 82

треугольники $\angle AMB$ и $\angle ECA$ равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). **6.8.** Пусть M — середина стороны AC (рис. 80). Треугольники ABD и AMD равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABD = \angle AMD = 90°$. Пусть $\angle ADM = \alpha$. Тогда $3\alpha = \angle BDA + \angle ADM + \angle MDC = 180°$, поэтому $\alpha = 60°$. Следовательно, $\angle C = 30°$ и $\angle A = 2\angle C = 60°$. **6.9.** В прямоугольном треугольнике AHB катет AH лежит против угла 30°, поэтому он вдвое меньше гипотенузы AB. **6.10.** Сначала докажите, что $BC_1 = BC = 2AC_1$ и $\angle ABC_1 = 30°$. Затем докажите, что $CK = C_1K = 2DK$. **6.11.** Пусть медиана CM и высота CH делят угол ACB треугольника ABC на три равные части. Для определённости можно считать, что точка H расположена между точками M и B. Проведите из точки M перпендикуляр MK к стороне AC (рис. 81). Тогда $AM = 2MH = 2KM$, поэтому $\angle A = 30°$ и $\angle ACH = 90° - \angle A = 60°$. **6.12.** Если $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$, то $\angle BCM = \angle CBM = 90° - \alpha$. Поэтому $AM = CM = MB$. **6.13.** Пусть CM и CH — медиана и высота треугольника ABC с прямым углом C. Тогда $\angle ACM = \angle A = \angle BCH$. Для определённости можно считать, что точка H лежит на отрезке MB (рис. 82). **6.14.** Пусть точка M — середина гипотенузы AB (рис. 83). Тогда треугольники DMC и CED равны по общей стороне CD и прилежащим к ней углам. Поэтому $AD + CE = AD + DM = AM = CM = DE$.

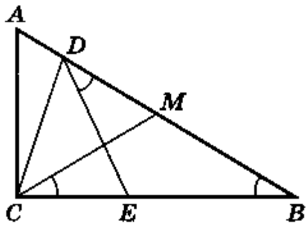

Рис. 83

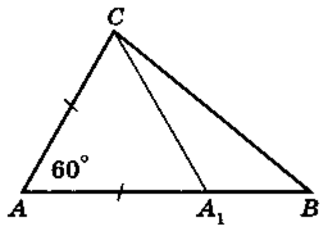

Рис. 84

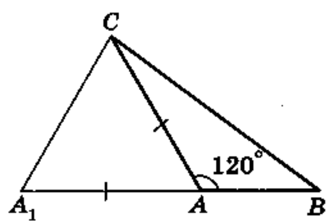

Рис. 85

6.15. Пусть точка M — середина стороны AB. Тогда треугольник AMC равносторонний, а треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle ACM = 60°$ и $\angle BCM = 30°$. **6.16.** В треугольнике APR сторона AP вдвое больше стороны AR и $\angle A = 60°$, поэтому $\angle ARP = 90°$ (см. задачу 6.15). **6.17.** На стороне AB отметьте точку A_1 так, что $AA_1 = AC$ (рис. 84). **6.18.** На продолжении стороны AB за точку A отметьте точку A_1 так, что $AA_1 = AC$ (рис. 85).

6.19. Треугольники ACD и BCE равны по двум сторонам и углу между ними. **6.20.** Отметьте на отрезке AD точку K так, что $AK = AB$, и докажите, что треугольник ABK равносторонний. Затем докажите равенство треугольников ABC и KBD (рис. 86). **6.21.** Отметьте на стороне AC точку T так, что $AT = AY$ (рис. 87). Тогда треугольники ATY и CTZ равносторонние, TY — биссектриса и медиана треугольника XTZ, поэтому $TY \perp YZ$. Следовательно, $\angle TZY = 30°$ и $\angle YZC = 90°$. **6.22.** Рассмотрите прямоугольник $ABCD$. Прямоугольные треугольники ABC и BAD равны по двум катетам, поэтому их гипотенузы AC и BD равны. **6.23.** Пусть O — середина диагонали AC прямоугольника $ABCD$. Тогда $BO = AO = DO$ и $\angle BOA + \angle AOD = 180° - 2\angle BAC + 180° - 2\angle CAD = 180°$, поэтому точки B, O, D лежат на одной прямой. **6.24.** Пусть K — точка пересечения прямых BC и MH (рис. 88). Тогда $\Delta KBM = \Delta DAM$. Поэтому HB — медиана прямоугольного треугольника KHC. **6.25.** Отметьте точку E на продолжении стороны BC за точку B так, что $BE = AK$ (рис. 89). Тогда треугольники ABC и EKC равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства $CM = MK$ следует, что KM — медиана прямоугольного треугольника EKC и $AK + BM = EB + BM = EM = CM$. **6.26.** Отложите на продолжении стороны AB за точку B отрезок BG, равный AB (рис. 90). Прямоугольные треугольники ECD и EBG равны по двум катетам, поэтому точки G, E и D лежат на одной прямой. Отрезок FB — медиана прямоугольного треугольника AFG, проведённая к гипотенузе. **6.27.** Треугольники ADE и CDG равны по двум сторонам и углу между ними. **6.28.** Пусть O — общая вершина трёх квадратов. Тогда треуголь-

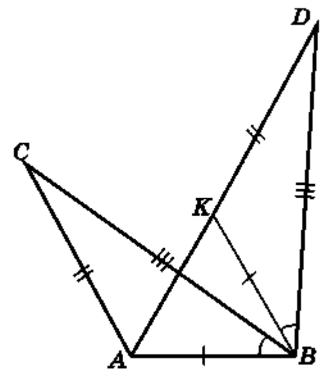

Рис. 86

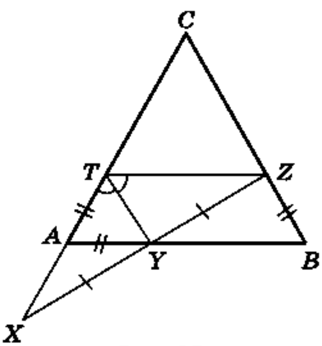

Рис. 87

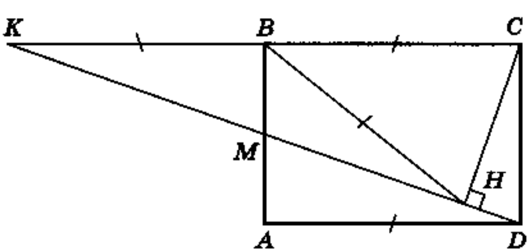

Рис. 88

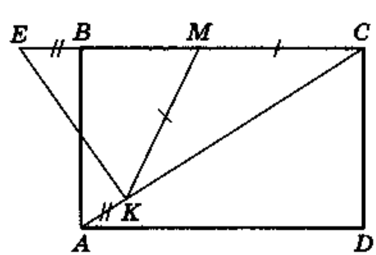

Рис. 89

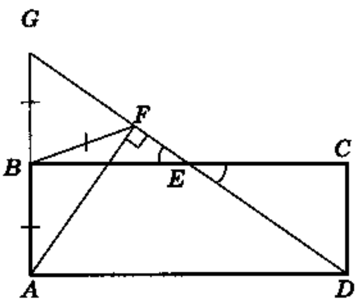

Рис. 90

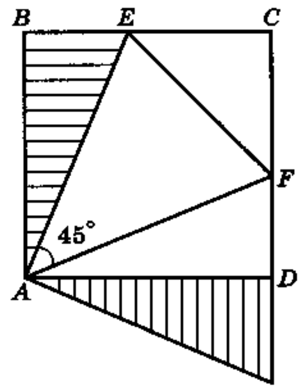

Рис. 91

ники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними. **6.29.** Треугольник DAE равнобедренный ($AD = AE$), и его угол при вершине A равен 30°, поэтому углы при его основании равны 75°. **6.30.** Треугольник DAE равнобедренный ($AD = AE$), и его угол при вершине A равен 150°, поэтому углы при его основании равны 15°. **6.31.** Воспользовавшись результатами задач 6.29 и 6.30, покажите, что $\angle EDC = 15° = \angle FDC$. **6.32.** Из треугольников ABE и ADF можно сложить треугольник, равный треугольнику AEF по двум сторонам и углу между ними (рис. 91). **6.33.** Обозначьте вершины квадрата и концы отложенных отрезков так, как показано на рисунке 92. Пусть $\angle CML = \alpha$. Тогда $\angle DKL = 90° - \alpha$ и $\angle MKP = 180° - (90° - \alpha) - 45° - 45° = \alpha$. **6.34.** Воспользуйтесь тем, что треугольник BDE равносторонний. **6.35.** Отложите на луче PB отрезок PN, равный PC. Пусть $\angle PCD = 2\alpha$. Тогда $\angle NPC = 2\alpha$ и $\angle PNC = 90° - \alpha$, поэтому $\Delta NBC = \Delta QDC$. **6.36.** Составьте квадрат $ABCD$ из квадратов, сторона каждого из которых в четыре раза меньше (рис. 93). Докажите, что заштрихованные на рисунке 93 прямоугольные треугольники MOP и DMQ равны (по двум катетам). **6.37.** Рассматриваемые углы равны двум другим углам, составляющим в сумме 45° (рис. 94). **6.38.** Рассматриваемые углы равны трём другим углам, составляющим в сумме 45° (рис. 95). **6.39.** Пусть на сторонах AB и

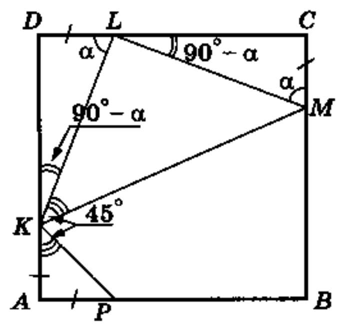

Рис. 92

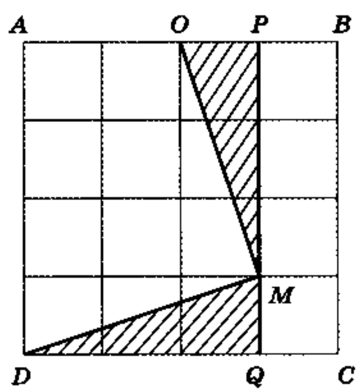

Рис. 93

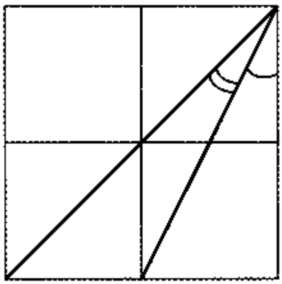

Рис. 94

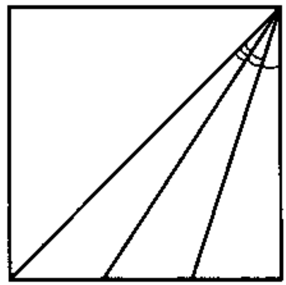

Рис. 95

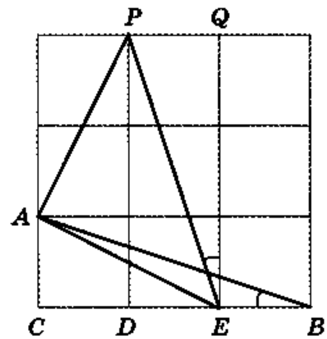

Рис. 96

AD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $AM + AN = AB$. Докажите, что $\angle MDN = \angle NCD$ и $\angle MBN = \angle MCB$. **6.40.** Постройте на катете BC квадрат и разделите каждую его сторону на три равные части (рис. 96). Сначала докажите, что треугольник APE равнобедренный прямоугольный и $\angle PEQ = \angle ABC$. Затем воспользуйтесь тем, что $\angle CEA + \angle AEP + \angle PEQ = 90°$. **6.41.** Докажите, что $\angle 1 + \angle 3 = 45° = \angle 2 + \angle 3$ (рис. 97).

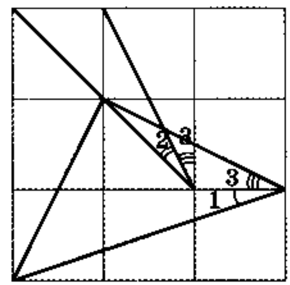

Рис. 97

7. Сумма углов треугольника

7.1. Треугольники равны по стороне и прилежащим к ней углам, поскольку $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - \angle A_1 - \angle C_1 = \angle B_1$. **7.2.** Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$. Тогда $\angle AMC = 90° - \alpha$ и $\angle BNC = 90° - \beta$, поэтому $\angle NCM = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 45°$. **7.3.** Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Тогда $\angle C = \angle ACM + \angle MCB = \alpha + \beta$. Поэтому $\angle C = 90°$. **7.4.** Пусть CD — биссектриса треугольника ABC, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = 120° + \alpha$. Тогда $\angle C = 60° - 2\alpha$ и $\angle CDB = 30°$. **7.5.** Треугольники ACD и BCE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = \angle CAB - \angle CAD + \angle CBA - \angle CBE = \angle CAB + \angle CBA$, поэтому $\angle AOB = \angle ACB$. **7.6.** Сначала, воспользовавшись теоремой о сумме углов треугольника, докажите равенство углов EAC и EBD и равенство треугольников EAC и EBD. Затем докажите равенство треугольников OAD и OBC и равенство треугольников OAE и OBE. **7.7.** Рассмотрите дополнительно угол 3 (рис. 98). Покажите, что $\angle 1 + \angle 3 = 120° = \angle 2 + \angle 3$. **7.8.** Пусть луч AO пересекает сторону BC в точке K. Тогда $\angle AOC > \angle AKC > \angle ABC$. **7.9.** Сна-

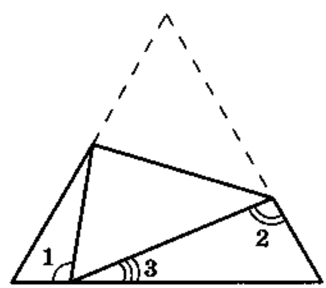

Рис. 98

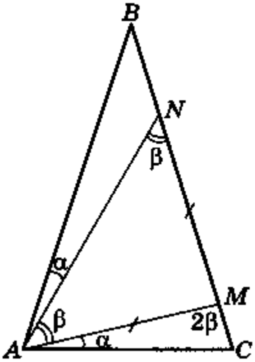

Рис. 99

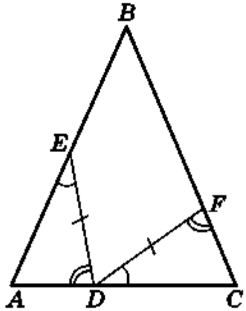

Рис. 100

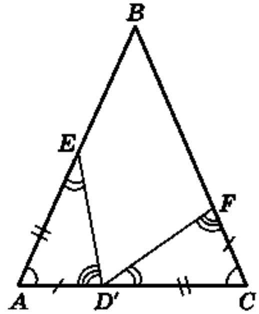

Рис. 101

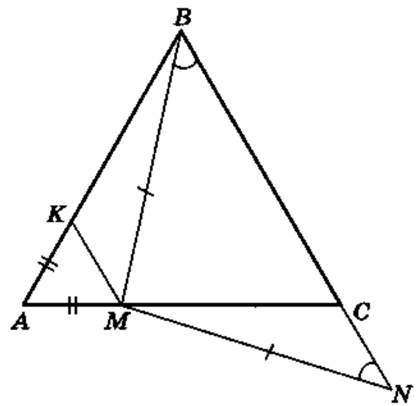

Рис. 102

чала докажите, что $\angle DEC = 2\angle DAC$. **7.10.** Отложите на продолжении стороны BC за точку C отрезок CD, равный CE. Тогда $AB = DB$ и $AE = DE$. Пусть $\angle EAD = \angle EDA = \alpha$. Тогда $\angle A = \angle CDE = \angle CED = 2\alpha$ и $\angle C = 4\alpha$. **7.11.** Согласно свойству внешнего угла $\angle BMA = \angle ACM + \angle CAM$. **7.12.** Пусть AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, $\angle A = 2\alpha$. Тогда сумма углов треугольника ACD равна либо $3\alpha + 75°$, либо $3\alpha + 105°$. **7.13.** Пусть O — точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1. Сначала на продолжении отрезка BB_1 за точку B_1 отложите отрезок B_1D, равный BB_1, а затем докажите, что треугольники AOD и BOA_1 равнобедренные. **7.14.** Пусть $\angle MAC = \angle BAN = \alpha$ и $\angle NAM = \angle ANM = \beta$ (рис. 99). Тогда $\angle A = 2\alpha + \beta$ и $\angle C = 180° - \alpha - 2\beta$. Поэтому $\angle CAN = \alpha + \beta = 60°$. **7.15.** а) Из равенств $\angle AED = 180° - \angle A - \angle ADE = 180° - \angle EDF - \angle ADE = \angle FDC$ и $\angle ADE = \angle DFC$ следует, что треугольники ADE и CFD равны по стороне и прилежащим к ней углам (рис. 100). Поэтому $AE + FC = CD + DA = AC$. б) Отметьте на стороне AC точку D' так, что $AD' = FC$ и $CD' = AE$ (рис. 101). Тогда треугольники EAD' и $D'CF$ равны, поэтому $D'E = D'F$ и точка D' совпадает с D. Кроме того, $\angle FD'E = 180° - \angle AD'E - \angle FD'C = 180° - \angle AD'E - \angle AED' = \angle A$. **7.16.** Отметьте на стороне AB точку K так, что $AK = AM$ (рис. 102). Тогда $\angle MKB = 120° = \angle NCM$ и $\angle KMB + 60° = \angle MBC + 60° = \angle MNC + 60°$, поэтому треугольники MKB и NCM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. **7.17.** Сначала докажите,

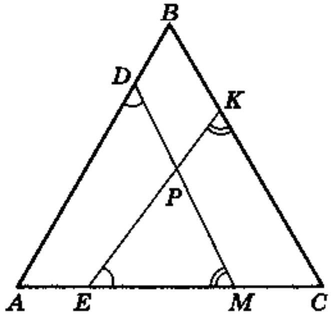

Рис. 103

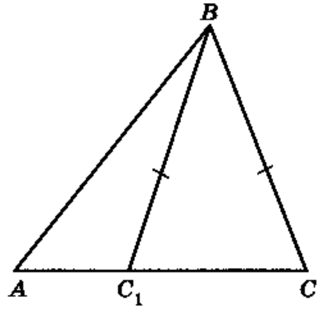

Рис. 104

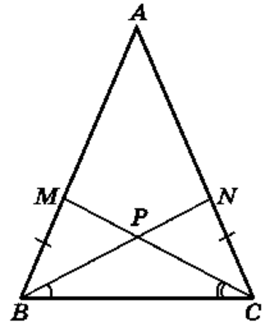

Рис. 105

что $CE = AD$ и $CK = AM$ (рис. 103), поэтому $\triangle DAM = \triangle ECK$. Затем докажите, что сумма углов E и M треугольника EPM равна сумме углов D и M треугольника ADM. **7.18.** Углы одного треугольника равны 36°, 72° и 72°, а другого 36°, 36° и 108°. **7.19.** Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle C = \angle B = \angle BPC = 2\alpha$, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = 5\alpha$. **7.20.** Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle QPC = x$. Тогда $\angle B = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle C = \angle BCP + \angle PCQ = \alpha + 90° - \dfrac{x}{2}$, поэтому $x = 3\alpha$. **7.21.** Треугольники AQP, QPC и PCB равнобедренные с углами α, 2α и 3α при основании, поэтому сумма углов треугольника ABC равна 7α. **7.22.** Треугольники ARQ, RQP, QPC и PCB равнобедренные с углами α, 2α, 3α и 4α при основании, поэтому сумма углов треугольника ABC равна 9α. **7.23.** Точка D совпадает с точкой R из задачи 7.22. Из решения этой задачи видно, что $\angle RQC = 160°$ и треугольник PQC равносторонний, поэтому $\angle RCQ = 10°$. **7.24.** а) Треугольники ADB и ADC прямоугольные равнобедренные. б) Если $\angle B = \angle C = \alpha$, то $\angle DAC = \angle ADC = 2\alpha$ и $\angle A = 3\alpha$. в) Если $\angle C = \alpha$, то $\angle B = \angle ADB = 2\alpha$. г) Если $\angle C = \alpha$, то $\angle DAB = \angle ADB = 2\alpha$ и $\angle A = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. **7.25.** Совместите стороны AB и A_1B_1 и углы A и A_1. Если точки C и C_1 при этом не совпадут (рис. 104), то треугольник CBC_1 равнобедренный. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ один из углов C и C_1 равен углу при основании этого равнобедренного треугольника, а другой равен смежному углу. **7.26.** Углы C и C_1 острые, поэтому равенство $\angle C + \angle C_1 = 180°$ выполняться не может. **7.27.** Либо треугольники BCM и CBN равны (и тогда равны углы B и C треугольника ABC), либо их углы MCB и NBC составляют в сумме 180° (рис. 105). Второй случай невозможен, так как тогда сумма углов треугольника BPC, где P — точка пересечения отрезков

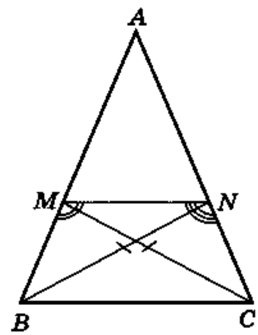

Рис. 106

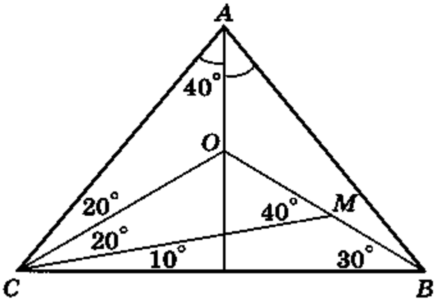

Рис. 107

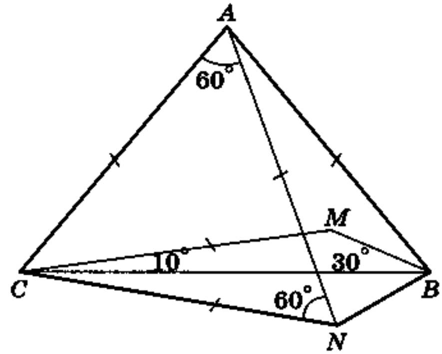

Рис. 108

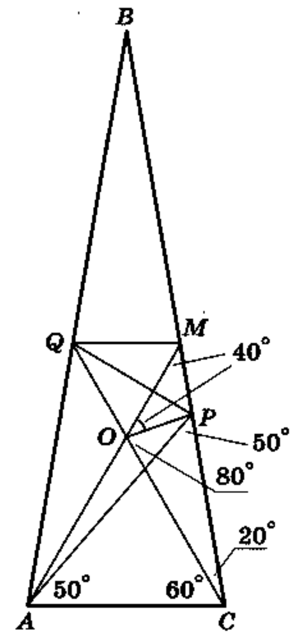

Рис. 109

BN и CM, больше 180°. **7.28.** Либо треугольники CNM и BMN равны (и тогда равны треугольники BCM и CBN, поэтому равны углы B и C треугольника ABC), либо их углы CNM и BMN составляют в сумме 180° (рис. 106). Второй случай невозможен, так как тогда сумма углов треугольника AMN больше 180°. **7.29.** Треугольник ACM равнобедренный с углом C, равным 40°. Равенство $AC = CM$ можно доказать разными способами. Первый способ. Пусть O — точка пересечения прямой BM и биссектрисы угла A (рис. 107). Треугольники CAO и CMO равны по общей стороне и прилегающим к ней углам. Второй способ. Постройте на стороне AC равносторонний треугольник ANC (рис. 108). Треугольник BAN равнобедренный, и $\angle ABN = 80°$. Поэтому $\angle CBN = 30°$ и треугольники BMC и BNC равны по общей стороне и прилегающим к ней углам. **7.30.** Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой CQ (рис. 109). Треугольник ACO равносторонний, а в треугольнике ACP углы A и P равны 50°, поэтому $OA = CO = AC = CP$. Из равенства $CO = CP$ следует, что углы O и P треугольника OCP равны 80°. Пусть M — точка пересечения прямых AO и BC. Тогда $\angle MOP = 180° - 60° - 80° = 40°$. Углы M и O треугольника MPO равны 40°, поэтому $OP = MP$. Точки P и Q равноудалены от точек O и M, значит, прямая PQ — серединный перпендикуляр к отрезку OM. Поэтому $\angle APQ = \angle APO + \angle OPQ = 30° + 50° = 80°$. **7.31.** Предположите, что $\angle A + \angle B > 120°$, $\angle B + \angle C > 120°$ и $\angle A + \angle C > 120°$. Тогда, сложив

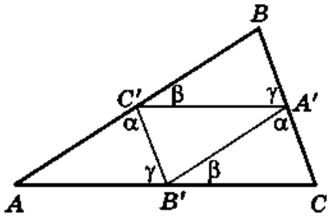

Рис. 110

эти неравенства, получим, что $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$. **7.32.** Пусть $\angle AC'B' = \alpha$, $\angle CB'A' = \beta$ и $\angle BA'C' = \gamma$ (рис. 110). Сумма углов треугольника $A'B'C'$ равна $(180° - \alpha - \gamma) + (180° - \alpha - \beta) + (180° - \alpha - \beta)$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Треугольники $A'B'C$ и $B'A'C'$ равны по стороне и прилежащим к ней углам. **7.33.** Пусть количество полученных треугольников равно n. Тогда сумма всех углов этих треугольников равна $180° \cdot n$. С другой стороны, каждая из 10 точек даёт в эту сумму вклад 360°, а каждая из четырёх вершин квадрата даёт вклад 90°. Поэтому $180° \cdot n = 10 \cdot 360° + 360°$.

8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

8.1. Пусть сторона BC треугольника ABC вдвое больше стороны AB, AM — медиана, BD — биссектриса (рис. 111). Тогда $AB = \frac{1}{2}BC = BM$. В равнобедренном треугольнике AMB биссектриса угла B перпендикулярна основанию AM. **8.2.** Пусть медиана AM треугольника ABC перпендикулярна биссектрисе BD (рис. 112). Тогда $AB = BM$ (задача 5.1), поэтому $BC = 2BM = 2AB$. **8.3.** Предположите, что биссектриса AD остроугольного треугольника ABC вдвое больше высоты AH. Тогда $\angle HAD = 60°$ и $\angle A > 120°$. **8.4.** Обозначим точку пересечения биссектрисы, высоты и серединного перпендикуляра буквой M (рис. 113). Тогда $\angle MBA = \angle MAB = \frac{1}{2}\angle A$, поэтому сумма острых углов прямоугольного треугольника ABH равна $\frac{3}{2}\angle A$. **8.5.** Отрезок HM является медианой прямоугольного треугольника BCH, проведённой к гипотенузе BC. **8.6.** Пусть $\angle C = 2\gamma$ (рис. 114). Тогда $\angle MAC = \gamma$ и $\angle MHC = \angle C = 2\gamma$. Угол MHC — внешний угол треугольника AMH, поэтому $\angle AMH = \gamma$. **8.7.** Угол ADB — внешний угол треугольника BDC, поэтому

$$\angle ADB = \frac{\angle B}{2} + \angle C = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} + \frac{\angle C - \angle A}{2} = 90° + \frac{\angle C - \angle A}{2}.$$

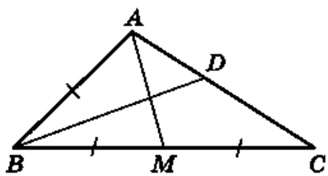

Рис. 111

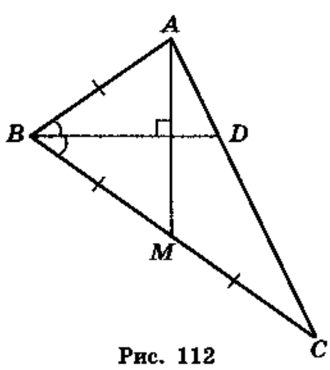

Рис. 112

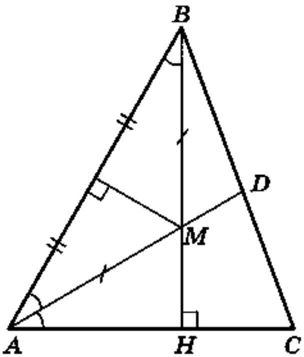

Рис. 113

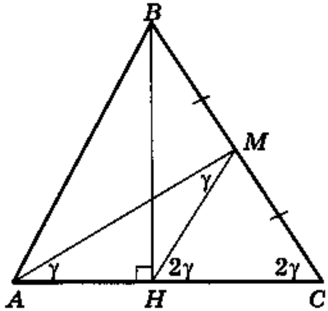

Рис. 114

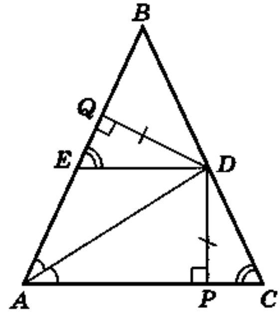

Рис. 115

8.8. Проведите из точки D перпендикуляры DP и DQ к прямым AC и AB (рис. 115). Треугольники ABC и EBD равнобедренные с общим углом при вершине B, поэтому $\angle BED = \angle ACB$. Следовательно, прямоугольные треугольники EDQ и CDP равны по катету и противолежащему острому углу. **8.9.** Проведите из точки D перпендикуляры DP и DQ к сторонам AB и BC, а из точки E проведите перпендикуляр ER к стороне AB (рис. 116). Прямоугольные треугольники ARE и CQD равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $ER = DQ = DP$. **8.10.** Отрезок A_1O является медианой прямоугольного треугольника CHA_1, проведённой из вершины прямого угла, поэтому $A_1O = \frac{1}{2}CH$. Аналогично $B_1O = \frac{1}{2}CH$. **8.11.** Перпендикуляр, проведённый из точки одной стороны острого угла к другой стороне, лежит внутри этого угла. Поэтому если углы A и B треугольника ABC острые, то высота, проведённая из вершины C, лежит внутри треугольника. **8.12.** Для высоты, проведённой из вершины тупого угла, см. указание к задаче 8.11. Из вершины острого угла тупоугольного треугольника высота проводится из точки одной стороны тупого угла к прямой, содержащей другую сторону. Такая высота лежит вне этого угла. **8.13.** Если угол C не прямой, то $AH < AC$ и $BD < BC$. Нестрогие неравенства $AH \leqslant AC$ и $BD \leqslant BC$ выполняются для любого угла C, поэтому $BC \leqslant AH \leqslant AC \leqslant BD \leqslant BC$. Это возможно лишь в том случае, когда $AC = BC$ и угол C прямой. **8.14.** Точка M лежит на биссектрисе угла A треугольника ABC, а точка N лежит на биссектрисе угла A треугольника AB_1C_1, поэтому точки M и N лежат на биссектрисе угла BAC. **8.15.** Точка O равноудалена от прямых DB и BC и от прямых EC и CB, поэтому она равноудалена от прямых AB и AC. Луч BO и точка C лежат по одну сторону от прямой AB, поэтому точки O и C

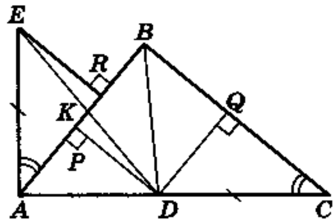

Рис. 116

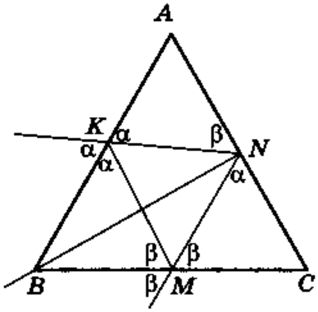

Рис. 117

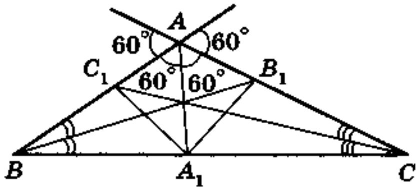

Рис. 118

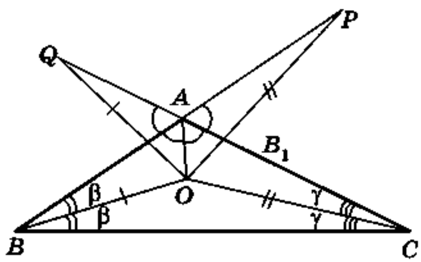

Рис. 119

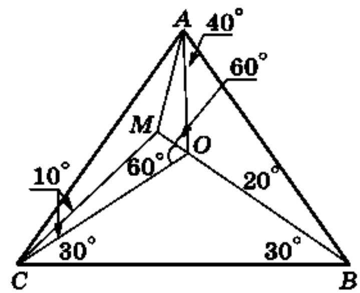

Рис. 120

лежат по одну сторону от прямой AB. Аналогично точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC. Следовательно, точка O лежит внутри угла BAC. **8.16.** Пусть $\angle MKB = \alpha$ и $\angle KMB = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 120°$, поэтому $\angle AKN = 180° - 60° - \beta = \alpha$ и $\angle CMN = \beta$ (рис. 117). Биссектрисы KB и MB внешних углов треугольника KMN пересекаются в точке B, поэтому биссектриса угла KNM проходит через точку B. **8.17.** Внешний угол с вершиной A треугольника ABC равен 60° (рис. 118). Поэтому луч AB_1 является биссектрисой внешнего угла треугольника ABA_1. Луч BB_1 является биссектрисой угла B этого треугольника. Поэтому луч A_1B_1 является биссектрисой угла AA_1C. Аналогично луч A_1C_1 является биссектрисой угла AA_1B. Угол между биссектрисами двух смежных углов равен 90°. **8.18.** Пусть $\angle B = 2\beta$ и $\angle C = 2\gamma$ (рис. 119). Тогда $2\beta + 2\gamma = 180° - 120° = 60°$, поэтому $\beta + \gamma = 30°$. Треугольники BOC и QOC равны по двум сторонам и углу γ между ними, поэтому $\angle QOA = 180° - 120° - \beta = 60° - \beta$. Аналогично $\angle POA = 60° - \gamma$. Следовательно, $\angle POQ = \angle POA + \angle QOA = 120° - \gamma - \beta = 90°$. **8.19.** Пусть O — точка пересечения прямой BM и биссектрисы угла A (рис. 120). Тогда $\angle ACM = 10° = \angle OCM$ и $\angle COM = 60° = \angle AOM$, поэтому M — точка пересечения биссектрис треугольника ACO.

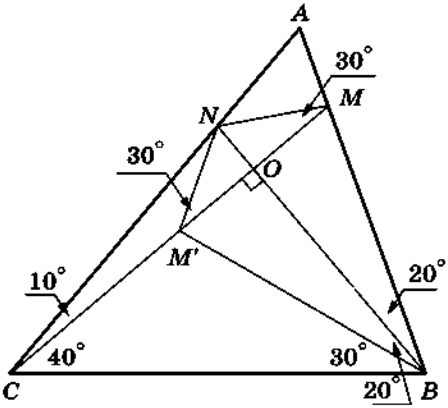

Рис. 121

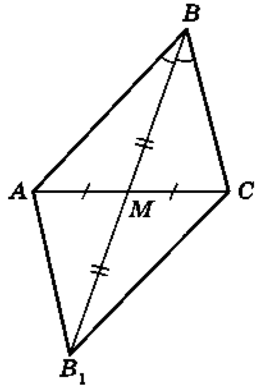

Рис. 122

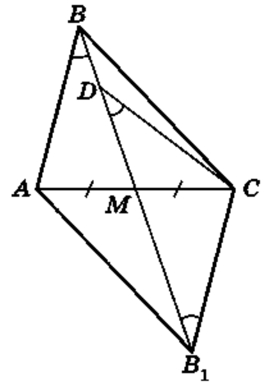

Рис. 123

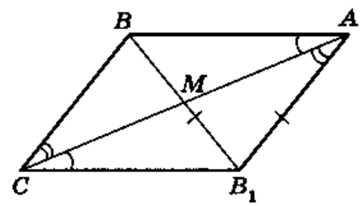

Рис. 124

Следовательно, $\angle MAO = 20°$. **8.20.** Пусть O — точка пересечения прямых BN и CM (рис. 121). Углы B и C треугольника BCO равны 50° и 40°, поэтому $NB \perp CM$. Отметьте на отрезке CO точку M' так, что $OM' = OM$. К треугольнику NBC и точке M' примените результат задачи 8.19 и получите, что $\angle M'NB = 60°$. Поэтому $\angle NMC = \angle NM'O = 30°$. **8.21.** Пусть медиана BM треугольника ABC совпадает с его биссектрисой. Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 122). Тогда треугольники AMB_1 и CMB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle AB_1M = \angle CBM = \angle ABM$, поэтому $AB = AB_1 = BC$. **8.22.** Предположите, что биссектриса угла A треугольника ABC делит пополам биссектрису BK. Тогда биссектриса угла A треугольника ABK совпадает с его медианой, поэтому $AB = AK$ (задача 8.21), и $\angle AKB = \angle ABK = \angle CBK$, но угол AKB является внешним углом треугольника CBK. **8.23.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 123). Тогда $\angle CDM = \angle ABM = \angle CB_1M$, поэтому $CD = CB_1 = AB$. **8.24.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1. Тогда $\angle BAB_1 = \angle A + \angle C = \angle ABM$, поэтому треугольник AB_1B равнобедренный (рис. 124) и $BC = AB_1 = BB_1 = 2BM$. **8.25.** Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны медианы BM и $B'M'$, стороны AB и $A'B'$ и стороны BC и $B'C'$. Удвойте медианы и постройте точки B_1 и B_1'. Треугольники ABB_1 и $A'B'B_1'$. равны по трём сторонам, поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ тоже равны. **8.26.** Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны медианы BM и $B'M'$ и равны углы, на которые эти медианы разбивают углы B и B'. Удвойте медианы и постройте точки B_1 и B_1'. Треугольники ABB_1 и $A'B'B_1'$ равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ тоже равны. **8.27.** Удвойте медиану

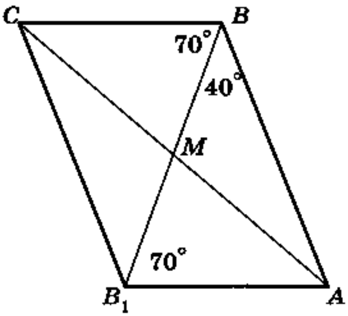

Рис. 125

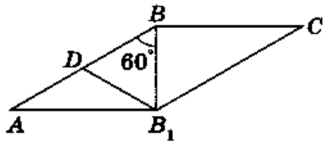

Рис. 126

BM и постройте точку B_1 (рис. 125). Треугольник ABB_1 равнобедренный, поэтому $\angle B_1BC = \angle BB_1A = 70°$ и $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle B_1BC = 40° + 70° = 110°$. **8.28.** Удвойте медиану BM и постройте точку B_1 (рис. 126). В треугольнике ABB_1 проведите медиану B_1D. Тогда $BD = \frac{1}{2}AB = BB_1$, поэтому треугольник BDB_1 равносторонний. Медиана B_1D треугольника ABB_1 равна половине стороны AB, поэтому угол BB_1A прямой. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle B_1BC = 60° + 90° = 150°$. **8.29.** Луч BO — биссектриса угла ABC, поэтому углы с вершиной B в треугольниках DBO и EBO равны. Сумма углов ADB и CEB равна $\frac{3}{2}(\angle A + \angle C) = 180°$. Поэтому если наложить треугольник DBO на треугольник EBO так, чтобы совместились углы с вершиной B и стороны BO, то треугольник DOE будет равнобедренным. **8.30.** Отметьте на продолжении отрезка BD за точку D точку Q так, что $\angle ACQ = 40°$. Пусть P — точка пересечения прямых AB и QC. Тогда $\angle BPC = 60°$ и D — точка пересечения биссектрис BQ и CA треугольника BPC. Согласно задаче 8.29 $AD = DQ$, поэтому $BD + DA = BD + DQ = BQ$. Углы при стороне CQ треугольника CBQ равны 80°, поэтому $BQ = BC$. **8.31.** В треугольниках BOE и BOD равны две стороны и угол (не между ними), поэтому (задача 7.25) либо $\triangle BOE = \triangle BOD$ (и тогда $BA = BC$), либо $\angle BDO + \angle BEO = 180°$. Во втором случае $\angle B + \angle EOD = 180°$. Кроме того, $\angle EOD = \angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$, поэтому $\angle B = 60°$.

9. Окружность и круг

9.1. Точка O_1 равноудалена от точек A и B, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Точка O_2 тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. **9.2.** Предположите, что окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в трёх точках A, B и C. Эти точки не могут лежать на одной прямой, поскольку прямая не может пересекать окружность в трёх точках. Согласно задаче 9.1 прямые AB и AC перпендикулярны прямой O_1O_2. Эти прямые не совпадают, поэтому из точки A проведены два перпендикуляра к одной прямой. **9.3.** Середины хорд, которые окружности высекают на прямой, совпадают. **9.4.** Пусть диаметр AB проходит через середину M хорды CD. Предположите, что хорда CD не является диаметром. Тогда центр O окружности не лежит на хорде CD; в частности,

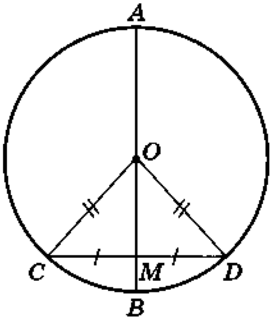

Рис. 127

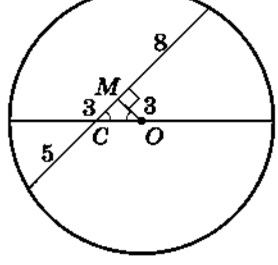

Рис. 128

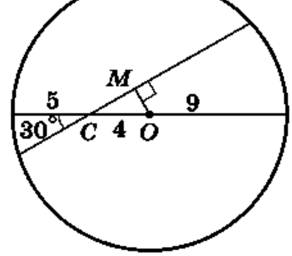

Рис. 129

точки O и M различны (рис. 127). Точки O и M лежат на диаметре AB и равноудалены от точек C и D, поэтому прямая AB — серединный перпендикуляр к хорде CD. **9.5.** Предположите, что общая середина M хорд AB и CD не совпадает с центром O окружности. Тогда обе прямые AB и CD перпендикулярны прямой OM. **9.6.** Проведите из центра O окружности перпендикуляр OM к хорде. Тогда точка M — середина хорды, а расстояние от центра окружности до хорды равно OM. Точка C пересечения хорды и диаметра делит хорду на отрезки длиной 5 и 11, поэтому $CM = 3$ (рис. 128). Треугольник COM равнобедренный прямоугольный, поэтому $OM = CM = 3$. **9.7.** Проведите из центра O окружности перпендикуляр OM к хорде. Тогда точка M — середина хорды, а расстояние от центра окружности до хорды равно OM. Точка C пересечения хорды и диаметра делит диаметр на отрезки длиной 5 и 13, поэтому $CO = 4$ (рис. 129). Катет OM прямоугольного треугольника COM лежит против угла 30°, поэтому $OM = \frac{1}{2}CO = 2$. **9.8.** Пусть M и N — середины хорд AB и CD, O — центр окружности, $OM = ON$. Тогда прямоугольные треугольники AOM и CON равны по гипотенузе и катету (рис. 130). **9.9.** Пусть M и N — середины хорд AB и CD, O — центр окружности. Тогда прямоугольные треугольники AOM и CON равны по гипотенузе и катету (рис. 131), поэтому прямоугольные треугольники POM и PON тоже равны по гипотенузе и катету.

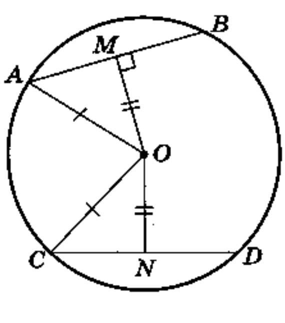

Рис. 130

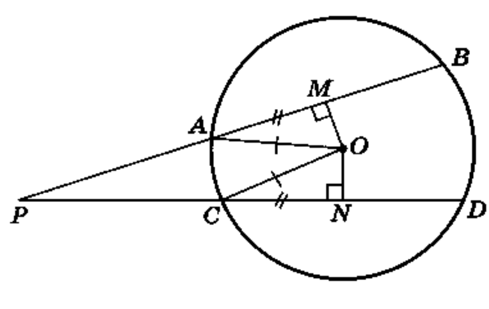

Рис. 131

9.10. Центр окружности, точка пересечения хорд и середины хорд являются вершинами прямоугольника. **9.11.** Расстояние от середины хорды до точки пересечения хорд равно 2, поэтому центр окружности, точка пересечения хорд и середины хорд являются вершинами квадрата, сторона которого равна 2. **9.12.** Пусть стороны AB и BC треугольника ABC равны и точка M — середина основания AC. Тогда $\angle AMB = 90°$, поэтому точка M лежит на окружности с диаметром AB. **9.13.** Пусть окружность с диаметром AB проходит через середину M стороны AC. Тогда BM — высота треугольника и его медиана. Треугольник, в котором медиана является высотой, равнобедренный (задача 5.2). **9.14.** Пусть окружность с диаметром AC пересекает стороны AB и BC в точках D и E, причём $AD = CE$. Тогда прямоугольные треугольники ACE и CAD равны по гипотенузе и катету, поэтому $\angle A = \angle C$. **9.15.** Прямоугольные треугольники ADM и ADN равны по гипотенузе и острому углу. **9.16.** Все диаметры окружности равны, поэтому хорду AB можно сравнить с диаметром AC. Если хорда AB отлична от диаметра, то диаметр AC — гипотенуза прямоугольного треугольника, а хорда AB — его катет. **9.17.** Отрезок CK перпендикулярен гипотенузе AB. **9.18.** Пусть окружность, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину M гипотенузы AB. Тогда угол AMC прямой, поэтому медиана CM совпадает с высотой. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный (задача 5.2). **9.19.** Точка D — основание высоты, проведённой из вершины A. **9.20.** Точки A_1 и B_1 лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок AB. **9.21.** Проведите из середины гипотенузы перпендикуляры к катетам (рис. 132). Они разбивают прямо-угольный треугольник на прямоугольник и два равных прямоугольных треугольника. Каждую из этих трёх фигур можно накрыть кругом диаметром $\frac{c}{2}$.

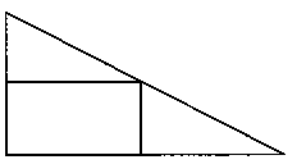

Рис. 132

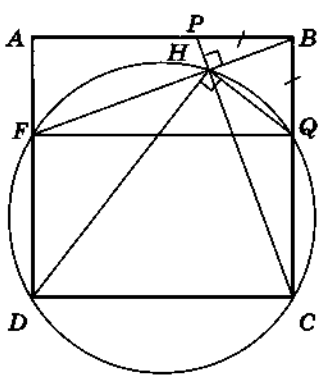

Рис. 133

9.22. Пусть прямая BH пересекает прямую AD в точке F (рис. 133). Прямоугольные треугольники ABF и BCP равны по катету и острому углу. Поэтому $AF = BP = BQ$. Следовательно, $CDFQ$ — прямоугольник. Все вершины этого прямоугольника лежат на окружности с диаметром FC; на этой же окружности лежит точка H. Отрезок DQ также является диаметром этой окружности, поэтому угол DHQ прямой. **9.23.** Непересекающиеся хорды разбивают круг на 3 части, а пересекающиеся на 4. **9.24.** Если хорды попарно не пересекаются, то они разбивают круг на 4 части. Если две хорды пересекаются, а третья их не пересекает, то они разбивают круг на 5 частей.

Если две хорды пересекаются, а третья либо пересекает только одну из них, либо проходит через их точку пересечения, то они разбивают круг на 6 частей. Если хорды попарно пересекаются и все точки пересечения различны в трёх разных точках, то они разбивают круг на 7 частей. **9.25.** Число частей наибольшее в том случае, когда хорды попарно пересекаются и все точки пересечения различны, а наименьшее в том случае, когда хорды попарно не пересекаются. **9.26.** Число частей наибольшее, когда окружности попарно пересекаются и все точки пересечения различны. **9.27.** См. указание к предыдущей задаче.

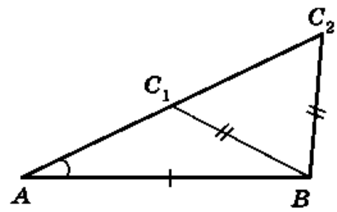

Рис. 134

10. Задачи на построение

10.1. Сначала через данную точку A проведите диаметр окружности, а затем через точку A проведите прямую, перпендикулярную этому диаметру. **10.2.** Сначала постройте угол с вершиной A, равный данному углу A. Затем на одной из его сторон отложите отрезок AB, равный данной стороне, и постройте окружность с центром B, радиус которой равен данной стороне BC. Точки, в которых эта окружность пересекает другую сторону угла, — искомые вершины C. Задача может иметь два решения (как на рисунке 134), одно решение или не иметь решений. **10.3.** Проведите через данную точку прямую, перпендикулярную биссектрисе угла. **10.4.** Проведите сначала диаметр AB окружности с центром O, а затем через точку O проведите прямую, перпендикулярную прямой AB. Эта прямая пересекает окружность в точках C и D (рис. 135). Точки A, C, B и D — вершины искомого квадрата. **10.5.** Проведите сначала диаметр AB окружности с центром O, а затем проведите окружность с центром A и радиусом AO. Эта окружность пересекает данную окружность в точках P и Q (рис. 136). Треугольник BPQ искомый. **10.6.** Отложите на продолжении стороны AC за точку A отрезок AD, равный стороне AB (рис. 137). Тогда $\angle CBD = \angle B + \dfrac{\angle A}{2} = 90° - \dfrac{\angle C - \angle B}{2}$. В треугольнике CBD известны

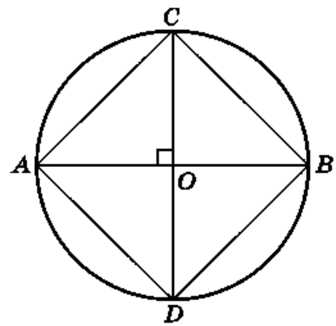

Рис. 135

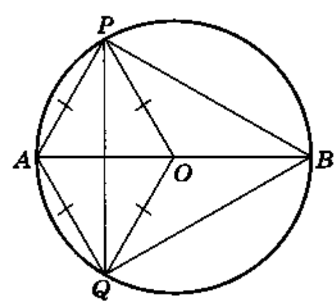

Рис. 136

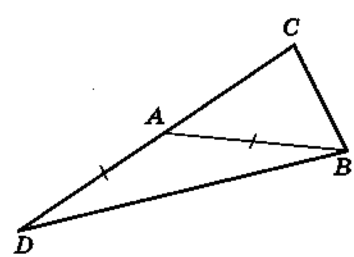

Рис. 137

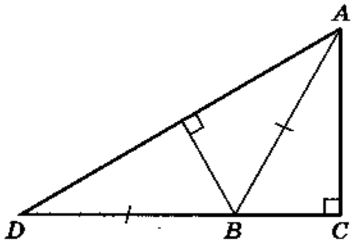

Рис. 138

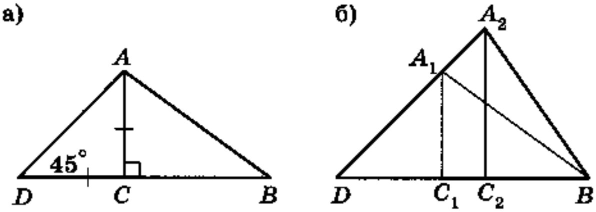

Рис. 139

стороны BC и CD и угол CBD. Такой треугольник можно построить (задача 10.2). Затем проведите серединный перпендикуляр к отрезку BD и найдите вершину A. **10.7.** Отложите на продолжении катета BC за точку B отрезок BD, равный гипотенузе AB (рис. 138). Прямоугольный треугольник ADC можно построить по двум катетам. Вершину B можно построить как точку пересечения стороны CD и серединного перпендикуляра к стороне AD. **10.8.** Рассмотрите прямоугольный треугольник ABC и отложите на продолжении катета BC за точку C отрезок CD, равный катету AC (рис. 139, *а*). В треугольнике ABD нам известен угол D (он равен 45°) и стороны BD и AB. Этот треугольник можно построить следующим образом. Постройте угол с вершиной D, равный 45°, отложите на одной его стороне отрезок DB, равный данной сумме катетов, и найдите точки A_1 и A_2 пересечения другой стороны и окружности с центром B, радиус которой равен гипотенузе (рис. 139, *б*). Из точек A_1 и A_2 проведите перпендикуляры A_1C_1 и A_2C_2 к прямой BD. Треугольники A_1BC_1 и A_2BC_2 искомые. **10.9.** Рассмотрите треугольник ABC и отложите на продолжениях стороны BC за точки B и C отрезки BB_1 и CC_1, равные сторонам AB и AC (рис. 140). Углы при основании равнобедренного треугольника AB_1B равны $\frac{\angle B}{2}$, а углы при основании равнобедренного треугольника AC_1C равны $\frac{\angle C}{2}$. В треугольнике AB_1C_1 известны сторона B_1C_1 и прилегающие к ней углы, поэтому его можно построить. Затем проведите серединные перпендикуляры к отрезкам AB_1 и AC_1 и найдите точки B и C. **10.10.** Отметьте на стороне AC треугольника ABC точку D так, что $CD = CB$, т. е. $AD = AC - BC$ (рис. 141). Тогда $\angle DBC = 90° - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2}$ и $\angle ADB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$. В треуголь-

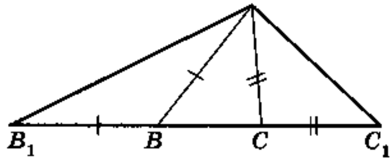

Рис. 140

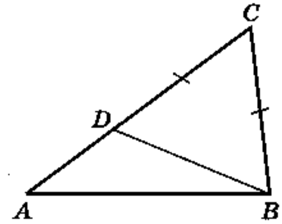

Рис. 141

нике ABD известны сторона AD и прилегающие к ней углы, поэтому его можно построить. Затем вершину C можно построить как точку пересечения луча AD и серединного перпендикуляра к отрезку BD. **10.11.** Рассмотрите треугольник ABC и удвойте его медиану BM, построив точку B_1. Стороны треугольника ABB_1 известны, поэтому его можно построить. Затем постройте медиану AM этого треугольника и удвойте её. В результате получена вершина C. **10.12.** Рассмотрите треугольник ABC и удвойте его медиану BM, построив точку B_1. Сторона BB_1 треугольника ABB_1 и прилежащие к ней углы известны, поэтому этот треугольник можно построить. Затем постройте его медиану AM и удвойте её. В результате получена вершина C. **10.13.** Сначала постройте прямоугольный треугольник CMH по гипотенузе CM и катету CH, а затем на прямой MH отложите отрезки MA и MB, равные половине стороны AB (рис. 142). **10.14.** Сначала постройте прямоугольный треугольник ADH по гипотенузе AD и катету AH. Затем от луча AD отложите по разные стороны от него два угла, равные половине угла A (рис. 143). **10.15.** Сначала постройте прямоугольный треугольник ABH по гипотенузе AB и катету AH. Затем постройте прямоугольный треугольник, равный треугольнику AMH, по гипотенузе AM и катету AH. От построенной ранее точки H на прямой BH отложите два отрезка HM_1 и HM_2, равные катету MH (рис. 144). Затем постройте два отрезка BC_1 и BC_2 так, чтобы точки M_1 и M_2 были их серединами. **10.16.** Постройте прямоугольные треугольники ABH и ACH по гипотенузе и катету; эти треугольники могут лежать либо по одну сторону от прямой AH, либо по разные стороны. **10.17.** Постройте окружность, диаметром которой служит отрезок с концами в данных точках. Возьмите одну из точек пересечения построенной окружности с данной окружностью и проведите из неё лучи через

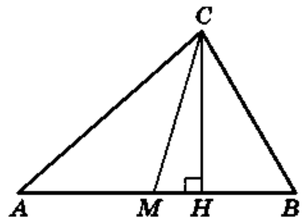

Рис. 142

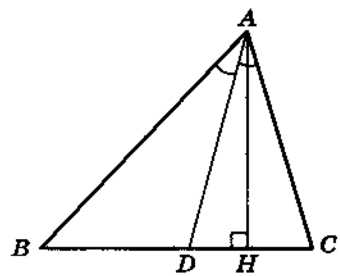

Рис. 143

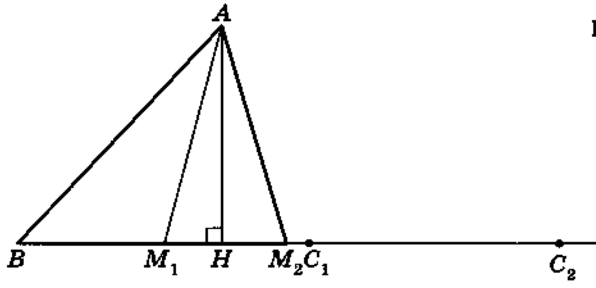

Рис. 144

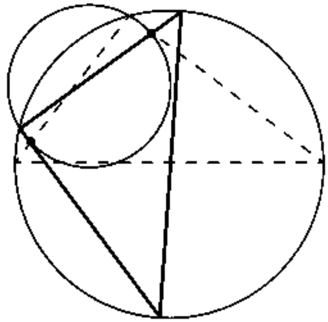

Рис. 145

данные точки до пересечения с данной окружностью (рис. 145). Второй прямоугольный треугольник изображён штриховой линией. **10.18.** Точки A_1 и B_1 лежат на окружности диаметром AB. Центр этой окружности можно построить как точку пересечения прямой l и серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1. Затем можно построить саму эту окружность и найти точки A и B. Точка C строится как точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. **10.19.** Предположите, что прямоугольник $ABCD$ построен. Опустите из точки P перпендикуляр PR на прямую BC. Прямоугольный треугольник PQR можно построить по гипотенузе PQ и катету $PR = AB = a$. Построив точку R, строим прямые BC и AD и опускаем на них перпендикуляры из точек M и N. **10.20.** Если поместить вершину угольника на окружности, то его стороны пересекут окружность в двух точках, являющихся концами одного диаметра. Построив два диаметра, можно построить точку их пересечения, т. е. центр окружности. **10.21.** Проведите через точки A и B прямые AP и BQ, перпендикулярные прямой AB, а затем проведите произвольный перпендикуляр к прямой AP. В результате получен прямоугольник. Постройте точку пересечения его диагоналей и опустите из неё перпендикуляр на прямую AB. **10.22.** Проведите через точку B прямую l, перпендикулярную прямой AB. Затем через точку A проведите произвольно две перпендикулярные прямые; они пересекают прямую l в точках M и N. Достройте прямоугольный треугольник MAN до прямоугольника $MANR$. Основание перпендикуляра, опущенного из точки R на прямую AB, является искомой точкой C. **10.23.** Опустите из точки A перпендикуляр AP на прямую OB и постройте отрезок AC, серединой которого является точка P. Тогда угол AOC искомый. **10.24.** Постройте точку B_1 так, чтобы точка O была серединой отрезка BB_1. Расположите чертёжный угольник так, чтобы его стороны проходили через точки B и B_1, а его вершина лежала на луче OA. Пусть A_1 — вершина расположенного таким образом прямого угла. Тогда угол A_1B_1B искомый.

11. Параллельные прямые

11.1. Возьмите две параллельные прямые a и b и две прямые, которые пересекают их и сами пересекаются в точке, не лежащей на прямых a и b. **11.2.** Возьмите три параллельные прямые и прямую, их пересекающую. **11.3.** Проведите две прямые через точку на одной из параллельных прямых. **11.4.** См. рис. 146. **11.5.** Возьмите три попарно пересекающиеся прямые и проведите параллельно каждой из них две прямые. **11.6.** Согласно примеру 1 на с. 39 треугольники OBD и OCE равнобедренные. **11.7.** Треугольники OBP и OCQ равнобедренные. **11.8.** Треугольники ABC и ABD равнобедренные. **11.9.** Пусть точка O — точка пересечения указанных биссектрис. Тогда треугольники OMB и ONC равнобедренные. **11.10.** Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, разделяет внешний угол на углы, равные углам B и C. **11.11.** Треугольники ABF и EBF равны по стороне BF и прилежащим к ней углам, поскольку $\angle AFB = 180° - \angle ADF = \angle BFE$. **11.12.** Треугольники ACE и CAD равны по стороне и прилежащим к ней углам. Поэтому равны их высоты, проведённые к стороне AC. Следовательно, $ED \parallel AC$. **11.13.** Совместите стороны AB и A_1B_1 данных треугольников так, чтобы точки C и C_1 лежали по одну сторону от прямой AB. Если прямые CD и C_1D_1 совпадают, то точки C и C_1 тоже совпадают. Если же эти прямые не совпадают, то они параллельны. В таком случае угол α (рис. 147) является внешним углом треугольника с углом β, а угол β является внешним углом треугольника с углом α. Поэтому $\alpha > \beta$ и $\beta > \alpha$, чего не может быть. **11.14.** Прямые a и b могут содержать стороны равнобедренного треугольника, а секущая — его основание. **11.15.** Прямые a и b перпендикулярны секущей. **11.16.** Пусть любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b. Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке A. Проведём через точку прямой a, отличную от точки A, прямую, параллельную прямой b. Эта прямая пересекает прямую a и не пересекает прямую b. **11.17.** Проведём высоту AH (рис. 148). Пусть для определённости точка M лежит на окружности с диаметром AB. Тогда угол AMB прямой и прямоугольные треугольники ABM и BAH равны по гипотенузе и острому углу. **11.18.** Пусть прямая, проходящая через точку M параллельно прямой AC, пересекает прямую AB в точке P (рис. 149). Тогда $\angle CNM = \angle MAN = \angle PMA$. В треугольниках MNC

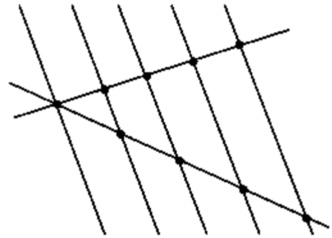

Рис. 146

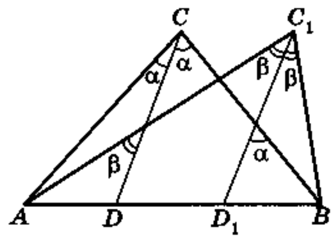

Рис. 147

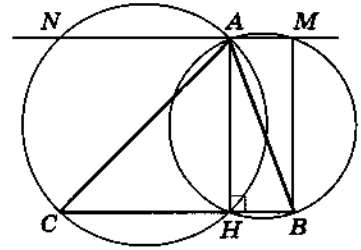

Рис. 148

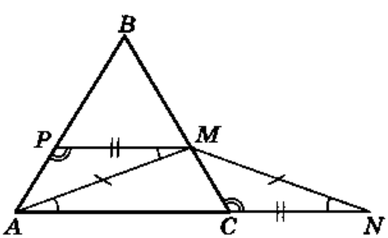

Рис. 149

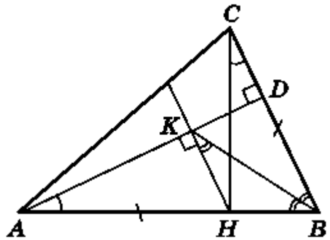

Рис. 150

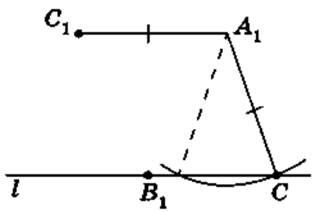

Рис. 151

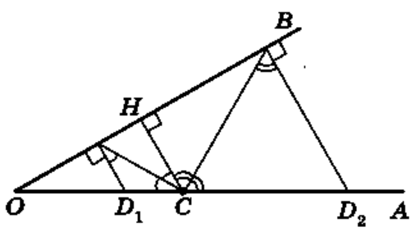

Рис. 152

и AMP, помимо углов N и M, равны также углы C и P, поэтому равны и углы M и A. Следовательно, эти треугольники равны по стороне ($MN = AM$) и прилежащим к ней углам, поэтому $CN = PM = BM$. **11.19.** Рассмотрим точку K, в которой пересекаются высота AD и прямая, проходящая через точку H параллельно стороне BC, и покажем, что луч BK — биссектриса угла B (рис. 150). Действительно, прямоугольные треугольники AHK и CBH равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $HK = HB$, а значит, $\angle HBK = \angle HKB = \angle KBC$. **11.20.** Сначала постройте две прямые, параллельные прямой AB, так, чтобы расстояние между первой построенной прямой и прямой AB равнялось CH, а вторая прямая была равноудалена от них. Затем на второй прямой постройте точку M. **11.21.** Пусть $AB = BC$ и A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC. Тогда $A_1C_1 \parallel AC$ и $AC_1 = A_1C_1 = A_1C$ (см. задачу 11.12 и указание к ней). Из этого вытекает следующее построение. Через точку B_1 проводим прямую l, параллельную A_1C_1. На прямой l строим точку C так, что $CA_1 = C_1A_1$ и $\angle C_1A_1C > 90°$ (рис. 151). Вершина A строится аналогично, а вершина B является точкой пересечения прямых AC_1 и A_1C. **11.22.** Проведите из точки C перпендикуляр CH к прямой OB и постройте точки пересечения прямой OB с биссектрисами угла OCH и смежного с ним угла. Через эти точки проведите прямые, параллельные прямой CH (рис. 152).

К главе 1. Прямая и отрезок, луч и угол. Есть мнение, что в математике, особенно в геометрии, всё нужно доказывать. Это неверное мнение. Чтобы что-то доказывать, нужно на что-то опираться, из чего-то исходить. Например, в геометрии не доказывают, что

- **через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Это утверждение принимается без доказательства. Из него исходят в рассуждениях о свойствах прямых и точек. «Точка» и «прямая» — это основные понятия в геометрии. Геометрия начинается с понятий и утверждений об этих понятиях, принимаемых без доказательства.

Такой подход к математическим доказательствам, когда некоторые достойные уважения и никем не оспариваемые утверждения принимаются без доказательства и из них выводятся другие утверждения, был разработан в Древней Греции. Слово «достойный» по-гречески произносится «аксиос», и такие утверждения стали называть аксиомами.

Система принимаемых без доказательства утверждений, описывающая плоскость, довольно сложная. Поэтому она вводится не сразу, а постепенно, чтобы можно было освоиться с тем, как эти утверждения применяются для доказательства других утверждений. Древнегреческим математикам, кстати сказать, так и не удалось построить полную систему понятий и утверждений об этих понятиях, принимаемых без доказательства. Наибольшие трудности у них вызвали пересечения кривых и движения. Они делали вывод о пересечении окружностей без аксиом, когда было, так сказать, видно, что они должны пересекаться. Никаких аксиом о том, когда отрезки или окружности пересекаются, у них не было. Движения они тоже не смогли включить в систему геометрических рассуждений, хотя и использовали их. Тем не менее древнегреческие математики умели доказывать весьма сложные теоремы.

Внутренняя область угла обладает одним коварным свойством. Рассмотрим неразвёрнутый угол AOB и начнём вращать луч OB (рис. 153, *а*). В тот момент, когда точка B попадает на продолжение луча OA, угол AOB становится развёрнутым. В таком случае внешняя и внутренняя области угла неразличимы (рис. 153, *б*). Затем, когда луч OB продолжит вращение,

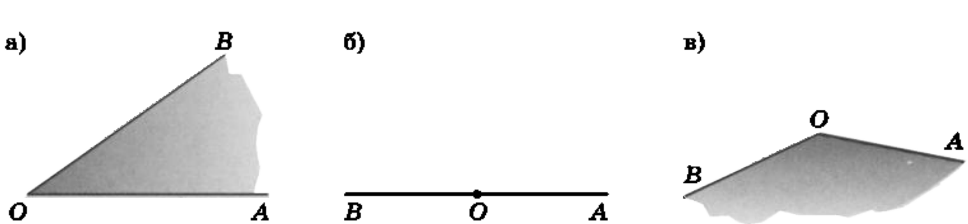

Рис. 153

внутренняя и внешняя области сразу же меняются местами (рис. 153, *в*). С этим свойством нам ещё предстоит не раз встретиться.

Докажем два наглядно очевидных свойства внутренней области неразвёрнутого угла. Древнегреческие математики такие свойства не доказывали; у них не был разработан подход к их доказательству. Тем не менее полезно поупражняться в таких доказательствах, чтобы лучше освоить доказательства, в которых участвуют точки, лежащие по одну сторону от прямой и по разные стороны.

Свойство 1. Если точка M лежит внутри угла AOB, то луч OM лежит внутри этого угла, а продолжение луча OM — вне угла.

Доказательство. Точки A и M лежат по одну сторону от прямой OB, поэтому луч OM лежит в полуплоскости с границей OB, содержащей точку A. Аналогично доказывается, что луч OM лежит в полуплоскости с границей OA, содержащей точку B.

Пусть точка M_1 лежит на продолжении луча OM. Тогда точки A и M_1 лежат по разные стороны от прямой OB, поэтому луч OM_1 лежит вне угла. ●

Свойство 2. Если точка M лежит внутри угла AOB, то луч OM пересекает отрезок AB.

Доказательство. Пусть A_1, B_1 и M_1 — точки на продолжениях лучей OA, OB и OM. Точки A и A_1 лежат по разные стороны от прямой OM, поэтому по одну сторону от этой прямой лежат либо точки A и B, либо точки A_1 и B, т. е. прямая OM пересекает либо отрезок AB, либо отрезок A_1B. Аналогично прямая OM пересекает либо отрезок AB, либо отрезок B_1A.

Точки M и A лежат по одну сторону от прямой OB, а точки A и A_1 — по разные стороны, поэтому точки M и A_1 лежат по разные стороны от прямой OB. Поэтому луч OM не пересекает отрезок A_1B. Аналогично луч OM не пересекает отрезок B_1A. Луч OM_1 тоже не пересекает отрезки A_1B и B_1A. Поэтому прямая OM пересекает отрезок AB. Но отрезок AB лежит внутри угла AOB, а луч OM_1 — вне. Поэтому отрезок AB пересекает именно луч OM. ●

К главе 2. Сравнение и измерение отрезков и углов. Если отрезок составлен из нескольких отрезков, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков. Как мы вскоре увидим, для углов всё обстоит гораздо сложнее из-за коварного свойства внешней области угла, о котором шла речь в комментариях к предыдущей главе.

Если на прямой отмечены точки A, B и C и заданы длины отрезков AB и BC, то длина отрезка AC не обязательно равна $AB + BC$. Дело в том, что точка B не обязательно лежит между точками A и C. А если точки A и C лежат по одну сторону от точки B, то длина отрезка AC равна $|AB - BC|$.

Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих двух углов. Это свойство такое же, как для длин отрезков. Если же два угла AOC и COB приложены друг к другу общей стороной OC так, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой

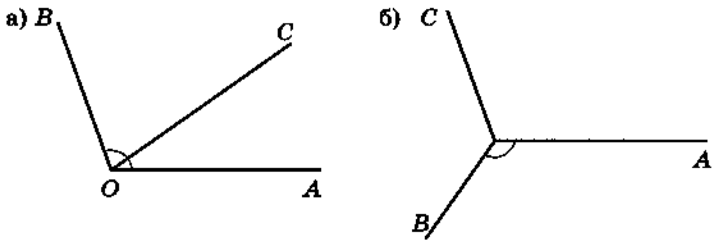

Рис. 154

OC, то градусная мера угла AOB не всегда равна сумме градусных мер углов AOC и COB. Пусть сумма градусных мер углов AOC и COB равна $n°$. Если $n < 180$, то градусная мера угла AOB равна $n°$ (рис. 154, *а*). А если $n > 180$, то градусная мера угла AOB равна $360° - n°$ (рис. 154, *б*). Это происходит как раз из-за того, что внутренняя и внешняя области угла меняются местами.

Это явление заслуживает того, чтобы разобраться с ним детально. Точно так же, как прикладываются друг к другу отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... (рис. 155, *а*), можно прикладывать друг к другу и углы A_1OA_2, A_2OA_3, ... (рис. 155, *б*). Приложив друг к другу отрезки, мы получим отрезок A_1A_n, и его длина равна сумме длин отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Приложив друг к другу углы, мы получим угол A_1OA_n, градусная мера которого не обязательно равна сумме градусных мер углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$. Тем не менее градусная мера угла A_1OA_n выражается через сумму градусных мер углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$ по определённому правилу.

Каждый раз, когда сумма градусных мер перешагивает через 360°, из неё нужно вычитать 360°. Если в итоге сумма градусных мер окажется больше 180°, но меньше 360°, то эту сумму нужно вычесть из 360°. Таким образом, если сумма градусных мер равна $a°$, то сначала из $a°$ нужно вычитать по 360°, пока не останется меньше 360°. Если в итоге осталось не больше 180°, то мы уже получили требуемый ответ. А если в итоге осталось $b°$, где b больше 180 (но меньше 360), то градусная мера угла A_1OA_n равна $(360 - b)°$.

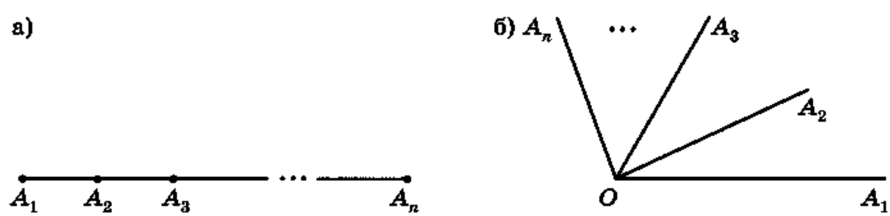

Рис. 155

Предположим, что из точки O проведены лучи OA, OB и OC и заданы величины углов AOB и BOC; обозначим их α и β. Как и в случае отрезков, угол AOC не обязательно равен $\alpha + \beta$. Но для углов ситуация ещё более сложная, чем для отрезков. Угол AOC не обязательно равен $\alpha + \beta$ даже в том случае, когда лучи OA и OC лежат по разные стороны от прямой OB. Дело в том, что если $\alpha + \beta > 180°$, то угол AOC равен $360° - (\alpha + \beta)$. Но если лучи OA и OC лежат по одну сторону от прямой OB, то угол AOC равен $|\alpha - \beta|$. Сложностей с этим углом не возникает, потому что он меньше 180°.

К главе 3. Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы. Докажем, что

• **из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a, и притом только один.**

Доказательство. Пусть сначала точка A лежит на прямой a. Возьмём один из двух лучей, на которые точка A разделяет прямую a. От этого луча в данную полуплоскость можно отложить прямой угол, и притом только один. Пусть теперь точка A не лежит на прямой a. Убедимся сначала, что перпендикуляр провести можно. Мысленно перегнём плоскость по прямой a так, чтобы полуплоскость с границей a, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость. Точка A при этом наложится на некоторую точку B. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях, поэтому отрезок AB пересекает прямую a в некоторой точке H. При перегибании плоскости по прямой все точки этой прямой остаются на месте. В частности, точка H остаётся на месте. Поэтому луч HA наложится на луч HB. Пусть C — некоторая точка прямой a, отличная от точки H. Углы AHC и BHC накладываются друг на друга, поэтому они равны. У этих углов сторона HC общая, а стороны HA и HB являются продолжениями одна другой, поэтому углы AHC и BHC смежные. Из равенства смежных углов следует, что они прямые. Поэтому прямые a и AH перпендикулярны.

Убедимся теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр AH к прямой a. Снова рассмотрим точку B, на которую наложится точка A при перегибании плоскости по прямой a, и некоторую точку C прямой a, отличную от точки H. Углы AHC и BHC равны, и угол AHC прямой, поэтому угол AHB развёрнутый. Следовательно, точка H — это общая точка прямых a и AB, а такая точка только одна. Прямая, проходящая через точки A и H, тоже только одна. ●

В рассуждениях с перегибанием плоскости мы, конечно, используем какие-то новые, ещё не встречавшиеся нам утверждения, принимаемые без доказательства. Они связаны как раз с тем понятием движения, которое древнегреческие математики не смогли включить в свою систему рассуждений. Так что сложности здесь есть, и немалые. Что такое движения плоскости, подробно обсуждается в 9 классе. Важнейшее свойство движений заключается в том, что движение совмещает отрезок с равным ему отрезком и угол с равным ему углом. Именно равенство совмещённых углов мы использовали при доказательстве.

К главе 5. Признаки равенства треугольников. Теоремы о первом и втором признаках равенства треугольников доказываются с помощью наложения одного треугольника на другой. При доказательстве теоремы о третьем признаке равенства треугольников не удаётся обойтись только наложением, нужны ещё какие-то рассуждения. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, стороны BC и B_1C_1 и стороны AC и A_1C_1, то можно наложить отрезок AB на отрезок A_1B_1 так, чтобы точка A наложилась на точку A_1, а точка B — на точку B_1. Сделать это можно двумя способами: так, чтобы точки C и C_1 оказались по разные стороны от прямой AB, и так, чтобы они оказались по одну сторону. Доказательство можно получить и в том и в другом случае, но эти доказательства разные. Приведём оба доказательства.

Доказательство первое. Пусть сначала точки C и C_1 лежат по разные стороны от прямой AB. Проведём отрезок CC_1. Он пересекает прямую AB в некоторой точке. Предположим сначала, что эта точка расположена между точками A и B. Углы при основании равнобедренного треугольника CAC_1 равны, углы при основании равнобедренного треугольника CBC_1 тоже равны. Поэтому угол ACB составлен из двух углов, равных углам, из которых составлен угол AC_1B. Следовательно, эти углы равны, и можно воспользоваться первым признаком равенства треугольников. Если отрезок CC_1 пересекает прямую AB в точке, расположенной вне отрезка AB, то углы ACB и AC_1B равны, потому что они получаются вычитанием равных углов из равных углов. Наконец, если отрезок CC_1 пересекает прямую AB в точке A или в точке B, то равенство углов ACB и AC_1B следует непосредственно из того, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. ●

Доказательство второе. Пусть теперь точки C и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB. Достаточно доказать, что точка C накладывается на точку C_1. Предположим, что после наложения отрезка AB на отрезок A_1B_1 точки C и C_1 оказались по одну сторону от прямой AB, но не совпали. Вершины A и B равнобедренных треугольников CAC_1 и CBC_1 с общим основанием CC_1 лежат на прямой, проходящей через середину отрезка CC_1. Но этого не может быть: точки C и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB, поэтому прямая AB не пересекает отрезок CC_1. Полученное противоречие означает, что точки C и C_1 совпадают. ●

При записи равенства треугольников удобно соблюдать соответствие вершин, чтобы равенство $\triangle ABC = \triangle DEF$ означало не только равенство треугольников ABC и DEF, но и равенство соответственных сторон: $AB = DE$, $BC = EF$ и $AC = DF$. Соответственные углы при этом тоже равны: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$. Вершины треугольников, равенство которых нужно доказать, могут быть обозначены разными буквами, например KFM и DQR. Прежде всего нужно установить соответствие вершин треугольников. В случае равенства углов всё просто: вершины равных углов соответствуют друг другу. В случае равенства сторон ситуация более сложная. Если $MK = QR$, то вершина M соответствует либо вершине Q, либо вершине R. Разберём два наиболее сложных примера (когда есть две пары равных сторон и пара равных углов и когда есть три пары равных сторон).

Если $MK = QR$, $KF = DQ$ и $\angle K = \angle Q$, то вершина K соответствует вершине Q (начинаем с самого простого). Затем из равенства $MK = QR$ получаем, что вершина M соответствует вершине R. После этого остались вершины F и D.

Если $FM = QD$, $QR = KM$ и $FK = RD$, то посмотрим на два первых равенства. Там присутствуют две одинаковые буквы: M и Q. Эти вершины соответственные. Вычеркнув их, получим остальные соответственные вершины: F и D, R и K.

К главе 6. Прямоугольные треугольники. Чтобы двигаться дальше, нам нужно следующее свойство прямоугольного треугольника: углы, лежащие против катетов, острые и их сумма равна 90°. Но это свойство нельзя доказать, опираясь лишь на принятые ранее без доказательства утверждения. Требуется какое-то новое утверждение. Такие утверждения могут быть разными. Все они так или иначе связаны с параллельными прямыми, поэтому подробности мы обсудим в комментариях к главе 11. Принимаемое нами сейчас без доказательства утверждение таково:

• **для любых двух отрезков существует прямоугольник, две смежные стороны которого равны этим отрезкам.**

Прежде чем переходить к доказательству свойств прямоугольного треугольника, докажем, что

• **противоположные стороны прямоугольника равны.**

Доказательство. Проведём для этого через середину M стороны AB прямоугольника $ABCD$ прямую, перпендикулярную прямой AB. Эта прямая не имеет общих точек с прямыми AD и BC, поэтому точки C и D лежат по разные стороны от неё. Следовательно, отрезок CD пересекает проведённую прямую в некоторой точке N. Наложим угол AMN на равный ему угол BMN так, чтобы луч MA наложился на луч MB, а луч MN остался на месте. Тогда точка A наложится на точку B, луч AD — на луч BC. Поэтому точка D наложится на некоторую точку прямой BC, а перпендикуляр ND к прямой AD наложится на некоторый перпендикуляр к прямой BC. Из точки N можно провести только один перпендикуляр к прямой BC, поэтому точка D наложится на точку C и сторона AD наложится на сторону BC. Следовательно, $AD = BC$. ●

Теперь уже можно доказать, что

• **углы прямоугольного треугольника, лежащие против катетов, острые и их сумма равна 90°.**

Доказательство. Достроим треугольник ABC с прямым углом C до прямоугольника $ACBD$. Треугольники ABC и BAD равны по трём сторонам. Поэтому $\angle BAC + \angle ABC = \angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90°$. ●

Отметим, что вместо утверждения о существовании прямоугольника с двумя заданными смежными сторонами можно принять без доказательства утверждение о том, что сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°. Действительно, существование прямоугольного треугольника с заданными катетами очевидно, а из двух равных прямоугольных треугольников можно сложить прямоугольник (рис. 156). Два угла полученной фигуры — прямые углы прямоугольных треугольников, а два других угла сложены из двух острых углов прямоугольного треугольника, поэтому они тоже прямые.

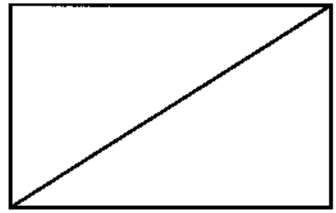

Рис. 156

К главе 7. Сумма углов треугольника. В комментариях к главе 6 доказано, что сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°. Воспользовавшись этим, можно доказать, что

- **сумма углов любого треугольника равна 180°.**

Доказательство. Действительно, проведём высоту CH треугольника ABC. Если угол A отличен от прямого и угол B отличен от прямого, то точка H лежит либо внутри отрезка AB (рис. 157, *а*), либо вне его. Во втором случае для определённости можно считать, что точка H лежит на луче AB (рис. 157, *б*); если точка H лежит на луче BA, то доказательство аналогично. В первом случае сумма углов треугольника ABC равна сумме острых углов прямоугольных треугольников ACH и BCH. Во втором случае введём обозначения $\alpha = \angle CAH$ и $\beta = \angle CBH$. Тогда $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 180° - \beta$ и $\angle ACB = (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \beta - \alpha$. Поэтому сумма углов треугольника ABC в этом случае также равна 180°. ●

С суммой углов треугольника связан вопрос, ответить на который не так просто, как может показаться на первый взгляд. Пусть задан отрезок AB и заданы углы α и β, сумма которых меньше 180°. Всегда ли найдётся треугольник ABC с заданной стороной AB и заданными углами $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$?

Попытаемся построить такой треугольник. Отложим от лучей AB и BA углы CAB и DBA, равные α и β, так, чтобы они были расположены по

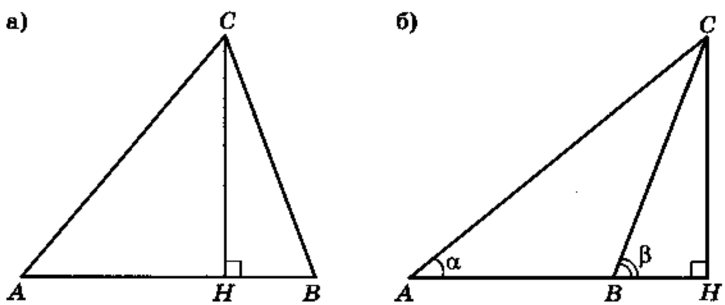

Рис. 157

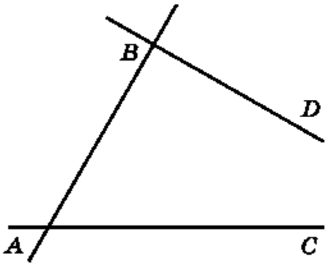

Рис. 158

одну сторону от прямой AB (рис. 158). Если эти лучи пересекаются, то мы найдём требуемый треугольник. Но почему они пересекаются?

Предварительно докажем следующее утверждение.

• **пусть на стороне OA острого угла AOB отложены равные отрезки $OA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$ и из их концов проведены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n к прямой OB (рис. 159, б). Тогда $OB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$.**

Доказательство. Равенство $OB_1 = B_1B_2$ следует из того, что медиана B_2A_1 прямоугольного треугольника OA_2B_2 равна половине гипотенузы (пример 3 на с. 18). Действительно, треугольник OA_1B_2 равнобедренный, поэтому его высота A_1B_1 является также медианой.

Чтобы доказать равенство $B_1B_2 = B_2B_3$, проведём из точки A_1 перпендикуляр A_1C_3 к прямой A_3B_3. Он пересекает отрезок A_2B_2 в некоторой точке C_2 (рис. 298). Равенство $A_1C_2 = C_2C_3$ доказывается точно так же, как в предыдущем случае. Из этого равенства следует требуемое равенство, поскольку противоположные стороны прямоугольника равны. Остальные равенства доказываются аналогично. ●

Докажем теперь, что **лучи AC и BD пересекаются** (см. рис. 158).

Доказательство. В той же полуплоскости с границей AB, в которой лежат лучи AC и BD, проведём луч BE так, что $\angle ABE = 180° - \alpha$. Луч BD расположен во внутренней области угла ABE, поскольку $\beta < 180° - \alpha$. Проведём из точки B перпендикуляр BH к прямой AC, отложим на луче BD равные отрезки $BD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = ...$ и проведём из их концов перпендикуляры D_1H_1, D_2H_2, ... к прямой BH (рис. 160). Отрезки BH_1, H_1H_2, H_2H_3, ... равны, поэтому $BH_n > BH$ для некоторого n. Точки B и H_n лежат по разные стороны от прямой HC, и прямые HC и H_nD_n не имеют общих точек, поэтому точки B и D_n тоже лежат по разные стороны от прямой AC.

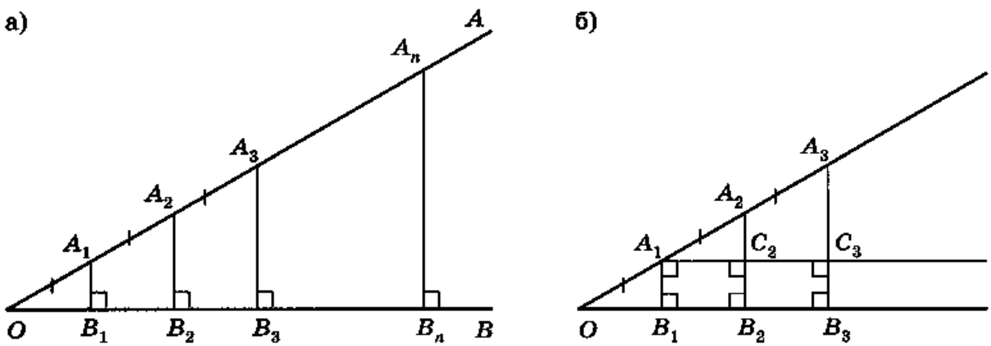

Рис. 159

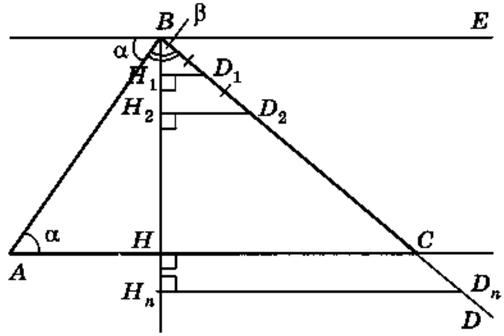

Рис. 160

Следовательно, отрезок BD_n пересекает прямую AC. Во внутренней области угла ABE расположен именно луч AC, а не его продолжение, поэтому луч AC пересекает луч BD, что и требовалось доказать. ●

Доказательство получилось длинное, поэтому имеет смысл ещё раз повторить другими словами, что же именно мы доказали. Предположим, что по одну сторону от прямой AB расположены лучи AC и BD, причём сумма углов CAB и DBA меньше 180°. Тогда лучи AC и BD пересекаются.

Именно это утверждение древнегреческий математик Евклид принял без доказательства при описании планиметрии. В его списке оно шло под последним, пятым номером и получило поэтому название *пятый постулат*. Обойтись без пятого постулата нельзя. Но его можно заменить на какое-нибудь другое утверждение. Например, мы приняли без доказательства утверждение о том, что существует прямоугольник с двумя заданными смежными сторонами, и вывели из него пятый постулат Евклида.

К главе 8. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. На с. 28 в решении примера 1 мы не объяснили, почему **биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в некоторой точке O.** Приведём это доказательство для тех, кто разобрался со свойствами внутренних областей углов в комментариях к главе 1.

Доказательство. Воспользуемся свойством 2 со с. 70: если точка M расположена внутри угла AOB, то луч OM пересекает отрезок AB. Луч AD пересекает отрезок BE в некоторой точке O. Луч BE пересекает отрезок AD в той же самой точке (прямые AD и BE имеют только одну общую точку). Поэтому отрезки AD и BE имеют общую точку O. При этом точка O лежит внутри треугольника ABC. Действительно, точка O лежит внутри угла BAC, поэтому точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC. Точка O лежит также и внутри угла ABC, поэтому точки O и A лежат по одну сторону от прямой BC. Следовательно, точка O лежит внутри угла ACB. ●

На с. 31 в условии задачи 8.15 предполагается, что биссектрисы углов DBC и ECB пересекаются. Покажем, что такое предположение делать не обязательно: эти биссектрисы всегда пересекаются.

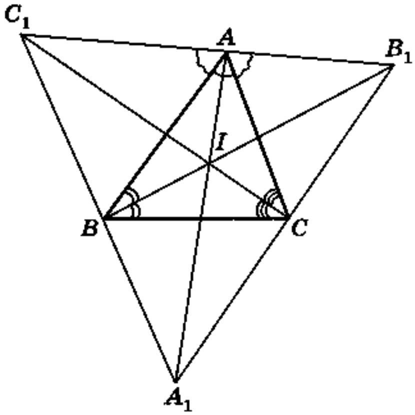

Рис. 161

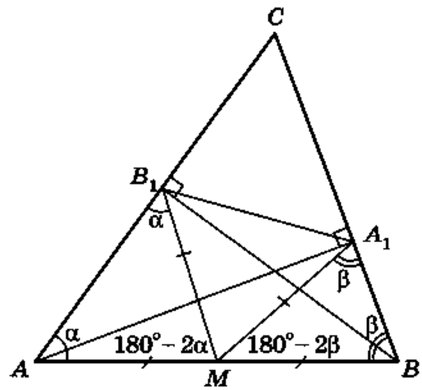

Рис. 162

Доказательство. Пусть точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и AC треугольника ABC за точки B и C (т. е. на продолжениях лучей BA и CA). Биссектрисы углов DBC и ECB образуют острые углы с отрезком BC. Сумма двух острых углов меньше 180°, поэтому биссектрисы пересекаются в некоторой точке O. ●

Воспользовавшись тем, что некоторые тройки биссектрис углов треугольника и его внешних углов пересекаются, можно прийти к следующему наблюдению. Проведём биссектрисы углов треугольника ABC и его внешних углов. Биссектрисы треугольника пересекаются в точке I, а биссектрисы пар внешних углов пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, через которые проходят биссектрисы углов треугольника (рис. 161). Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Они пересекаются в одной точке — в точке I.

В задачах для 8 класса нам встретится следующее утверждение:

• **если AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, то $\angle A = \angle B_1A_1C$.**

Там оно доказывается разными методами, с которыми мы пока не знакомились. Но его можно доказать уже сейчас, хотя и с помощью некоторых вычислений.

Доказательство. Отметим середину M стороны AB (рис. 162). Отрезки MA_1 и MB_1 — медианы прямоугольных треугольников ABA_1 и ABB_1, поэтому они равны половине их общей гипотенузы AB. Пусть $\alpha = \angle A$ и $\beta = \angle B$. Тогда углы AMB_1 и A_1MB, противолежащие основаниям равнобедренных треугольников, равны $180^\circ - 2\alpha$ и $180^\circ - 2\beta$. Далее, $\angle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$, поэтому углы при основании равнобедренного треугольника A_1B_1M равны $180^\circ - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle B_1A_1C = 180^\circ - \angle B_1A_1M - \angle MA_1B = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \beta = \alpha = \angle A_1$. ●

К главе 10. Задачи на построение. При построениях часто бывает нужно отметить произвольную точку или провести произвольную прямую. Например, когда нужно построить треугольник по трём сторонам, выбирают место для его построения, указав положения двух вершин.

Но даже в тех случаях, когда расположение фигуры задано и выбирать его не нужно, произвольные точки и произвольные прямые часто проводятся. Например, биссектриса неразвёрнутого угла строится следующим образом. На одной из сторон угла с вершиной A отмечается произвольная точка B, затем проводится окружность радиуса AB с центром A. Она пересекает другую сторону угла в точке C. Мы строим середину M отрезка BC и проводим луч AM. В этом случае выбирается произвольная точка, она используется при построении, но результат построения от выбора этой точки не зависит.

Но с выбором произвольной точки бывают и более сложные ситуации: её нельзя выбирать совсем произвольно. Например, при построении прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно данной прямой a, выбирается произвольная точка A и через неё проводится окружность с центром M. Если эта окружность пересекает прямую a в двух точках, то затем строится середина отрезка с концами в этих точках. Но эта окружность не всегда пересекает прямую a. А если окружность не пересекает прямую a, то построение не получится. Таким образом, в этом случае выбирается точка и она используется при построении. Точка выбирается не произвольно, но не из нескольких специальных точек. Результат построения от выбора точки не зависит.

К главе 11. Параллельные прямые. В комментариях к главе 3 было доказано, что из точки, не лежащей на прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой. Из этого следует, что через точку A, не лежащую на прямой a, проходит прямая, параллельная прямой a. Действительно, проведём из точки A перпендикуляр AH к прямой a и затем проведём через точку A прямую b, перпендикулярную прямой AH. Прямые a и b не пересекаются.

Более сложен вопрос, можно ли через точку A провести несколько прямых, параллельных прямой a. Следующие три утверждения тесно связаны друг с другом.

1. Через точку A, не лежащую на прямой a, проходит только одна прямая, параллельная прямой a.

2. Сумма углов треугольника равна 180°.

3. Существует прямоугольник с двумя заданными смежными сторонами.

В комментариях к главе 6 рассказано, как утверждения 2 и 3 выводятся друг из друга. Покажем теперь, как из утверждения 3 выводится утверждение 1.

Доказательство. В комментариях к главе 7 (исходя из утверждения 3) было доказано следующее. Пусть по одну сторону от прямой AB расположены лучи AC и BD, причём сумма углов CAB и DBA меньше 180°. Тогда лучи AC и BD пересекаются.

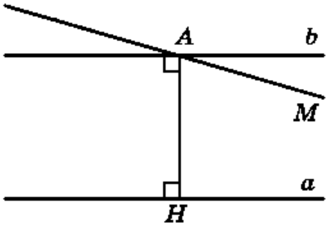

Рис. 163

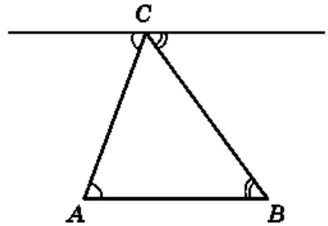

Рис. 164

Проведём через точку A прямую AM, отличную от прямой b. Можно считать, что точки M и H лежат по одну сторону от прямой b (рис. 163). Угол HAM острый, поэтому луч AM пересекает прямую a. Утверждение 1 доказано. ●

Выведем теперь из утверждения 1 утверждение 2. Рассуждения будут длинные, но попутно мы докажем несколько свойств параллельных прямых.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую. Действительно, если прямая пересекает только первую параллельную прямую и не пересекает вторую, то через точку пересечения проходят две прямые, параллельные второй прямой.

Внешний угол треугольника ABC с вершиной A больше угла B. Это можно доказать, не используя утверждение 2. Для доказательства достаточно удвоить медиану CM и построить точку C_1: внешний угол с вершиной A больше угла BAC_1, равного углу B.

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые не пересекаются. Действительно, если бы эти прямые имели общую точку, то получился бы треугольник, у которого внешний угол равен одному из углов треугольника, не смежному с этим внешним углом, чего не может быть.

Воспользовавшись утверждением 1, покажем, что если две параллельные прямые a и b пересечены секущей c, то накрест лежащие углы равны. Проведём через точку пересечения прямых b и c прямую b_1 так, чтобы накрест лежащие углы, образованные прямыми a и b_1 и секущей c, были равны. Тогда прямая b_1 параллельна прямой a и проходит через точку прямой b, поэтому прямые b и b_1 совпадают.

Утверждение 2 теперь очень просто выводится из того, что накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны. Действительно, проведём через вершину C треугольника ABC прямую, параллельную прямой AB, и отметим равные соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущими AC и BC (рис. 164). Угол C и два угла с вершиной C, равные углам A и B, в сумме составляют $180°$. ●

Содержание